



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

---

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y  
ELÉCTRICA**

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**Cálculo de Perfiles Transitorios a lo Largo de Sistemas de  
Transmisión Aplicando la Transformada Numérica de Laplace**

**T E S I S**

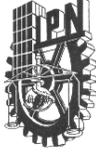
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**P R E S E N T A**

**Rodrigo Nuricumbo Guillén**



MÉXICO D.F. ENERO 2014



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 11:00 horas del día 12 del mes de Diciembre del 2013 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E.-ZAC. para examinar la tesis titulada:

**CÁLCULO DE PERFILES TRANSITORIOS A LO LARGO DE SISTEMAS DE  
TRANSMISIÓN APLICANDO LA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE**

Presentada por el alumno:

<b>NURICUMBO</b>	<b>GULLÉN</b>	<b>RODRIGO</b>
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)
Con registro:		
A	1	2
0	5	6
2		

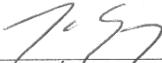
aspirante de:

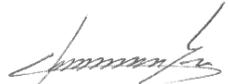
**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

#### Directores de tesis

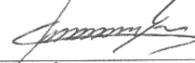
  
\_\_\_\_\_  
DR. PABLO GÓMEZ ZAMORANO

  
\_\_\_\_\_  
DR. FERMÍN PASCUAL ESPINO CORTÉS

#### Presidente

  
\_\_\_\_\_  
DR. DAVID SEBASTIÁN BALTAZAR

#### Segundo Vocal

  
\_\_\_\_\_  
DR. FERMÍN PASCUAL ESPINO CORTÉS

#### Tercer Vocal

  
\_\_\_\_\_  
DR. RAÚL PEÑA RIVERO

#### Secretario

  
\_\_\_\_\_  
DR. GERMAN ROSAS ORTÍZ

#### PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
\_\_\_\_\_  
DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México, D.F. el día **06** del mes de **Enero** del año **2014**, el (la) que suscribe **Rodrigo Nuricumbo Guillén** alumno(a) del Programa de **Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica**, con número de registro **A120562**, adscrito(a) a la **Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME unidad Zacatenco del IPN**, manifiesto(a) que es el (la) autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del (de la, de los) **Dr. Pablo Gómez Zamorano y del Dr. Fermín Pascual Espino Cortés** y cede los derechos del trabajo titulado **Cálculo de Perfiles Transitorios a lo Largo de Sistemas de Transmisión Aplicando la Transformada Numérica de Laplace**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del (de la) autor(a) y/o director(es) del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones [rodrigo.ng.85@gmail.com](mailto:rodrigo.ng.85@gmail.com), [pgomezz@ipn.mx](mailto:pgomezz@ipn.mx), [fespinoc@ipn.mx](mailto:fespinoc@ipn.mx). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



---

Rodrigo Nuricumbo Guillén

## **Agradecimientos**

- A Dios por todas las bendiciones que me ha dado durante mi vida, darme salud, felicidad y la sabiduría para poder concluir mis estudios de maestría.
- A mis directores de tesis: Dr. Pablo Gómez Zamorano y Dr. Fermín Pascual Espino Cortés, por todo el apoyo, consejos y conocimiento que me brindaron durante esta etapa de mi vida, sin los cuales hubiera sido imposible la terminación de este trabajo.
- A la comisión revisora, por sus valiosos comentarios y sugerencias que permitieron mejorar la calidad de este trabajo.
- A mis amigos y compañeros, por su apoyo y por todas las experiencias que vivimos juntos.
- Al Instituto Politécnico Nacional y al Conacyt por el apoyo económico brindado para permitirme realizar los estudios de maestría.

## **Dedicatoria**

- A mi Madre Ma. Concepción del Socorro, por su apoyo incondicional durante no solo esta etapa, sino en toda mi vida, que con su ejemplo y enseñanzas me permitieron ser una mejor persona y alcanzar mis metas y objetivos.
- A mi hermana Leticia del Carmen, por el apoyo y cariño mostrado, y de quién he aprendido mucho.
- A Xiuling Yuan González, por todo este tiempo juntos, por su apoyo incondicional, y por ser la persona que siempre me impulsa a salir adelante y mejorar en todos los aspectos de mi vida.

## Resumen

Las líneas de transmisión son elementos de gran importancia en la red eléctrica, ya que se encargan de llevar la energía eléctrica desde los centros de generación a los centros de consumo. Por lo tanto, es necesario contar con un buen diseño de éstas para reducir la probabilidad de falla, ya que esto significaría una interrupción en el suministro de energía eléctrica.

Los transitorios electromagnéticos son una de las causas principales de falla de una línea de transmisión. Estos fenómenos se deben generalmente a maniobras de interruptores o a descargas atmosféricas. En consecuencia, es necesario tener herramientas de análisis para poder estudiar de manera adecuada el comportamiento de las líneas de transmisión ante estos eventos. Adicionalmente, otros elementos de la red eléctrica como transformadores y cables subterráneos también son susceptibles a sufrir fallas debido a transitorios electromagnéticos.

En este trabajo se aplica de manera sucesiva (dos veces) la transformada de Laplace a las Ecuaciones del Telegrafista en el dominio espacio-tiempo ( $z-t$ ) para obtener un modelo de línea de transmisión en el dominio frecuencia espacial-frecuencia temporal ( $q-s$ ). De esta forma, las Ecuaciones del Telegrafista pasan de ecuaciones diferenciales parciales en el dominio  $z-t$  a ecuaciones algebraicas en el dominio  $q-s$ , las cuales se pueden resolver de manera sencilla para obtener las tensiones y corrientes a lo largo de la línea. Posteriormente, por medio de la aplicación sucesiva de la transformada numérica de Laplace inversa se obtienen los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea en el dominio del tiempo.

El método propuesto también se aplica al cálculo de perfiles transitorios a lo largo de otros elementos de la red eléctrica representados mediante modelos de parámetros distribuidos, tales como devanados de transformadores, redes de transmisión o sistemas de cables subterráneos.

Adicionalmente, el modelo propuesto se emplea en el cálculo de perfiles transitorios de tensión y corriente a lo largo de líneas de transmisión iluminadas por campos electromagnéticos incidentes generados por descargas atmosféricas indirectas. El efecto de estos campos incidentes se representa por medio de fuentes de tensión y corriente distribuidas a lo largo de la línea.

Los modelos propuestos en este trabajo se implementaron en el lenguaje de programación de MATLAB, y los resultados obtenidos fueron validados mediante simulaciones realizadas en ATP/EMTP y PSCAD/EMTDC.

## Abstract

Transmission lines are elements of great importance in the electrical network, since they transport electric energy from the power plants to the demand centers. Therefore, it is necessary to design them correctly to avoid any possible failure, since this would mean an interruption of the electrical energy supply.

Electromagnetic transients are among the main causes of failure in a transmission line. These phenomena are generally due to lightning or switching operations. In consequence, it is necessary to have suitable tools to analyze the behavior of transmission lines during these events. In addition, other elements of the electrical network, such as transformers and cables, are also susceptible to damage produced by transients.

In this work, the Laplace transform is applied successively (twice) to the Telegrapher Equations in the space-time ( $z-t$ ) domain to obtain a transmission line model in the spatial frequency-temporal frequency ( $q-s$ ) domain. In this way, Telegrapher equations are transformed from partial differential equations in the  $z-t$  domain to algebraic equations in the  $q-s$  domain, which can be easily solved for the voltages and currents along the line. Then, by means of the successive application of the numerical inverse Laplace transform the voltage and current profiles in the time domain are obtained.

The proposed method is also applied to other elements of the electrical system represented by means of distributed parameter models, such as transformers windings, transmission networks and underground cables.

Additionally, the proposed model is used in the computation of transient profiles along transmission lines excited by incident electromagnetic fields generated by indirect lightning strokes. The effect of these electromagnetic fields is taken into account by means of distributed voltage and current sources connected along the transmission line.

The models proposed in this work were implemented using the MATLAB programming language, and the results were validated by means of simulations performed in ATP/EMTP and PSCAD/EMTDC.

# Índice

<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>II</b>
<b>DEDICATORIA.....</b>	<b>V</b>
<b>RESUMEN .....</b>	<b>I</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>II</b>
<b>ÍNDICE .....</b>	<b>III</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE TABLAS .....</b>	<b>X</b>
<b>SIMBOLOGÍA.....</b>	<b>11</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1    GENERALIDADES .....	1
1.2    OBJETIVO .....	3
1.3    ANTECEDENTES .....	3
1.4    ESTADO DEL ARTE .....	5
1.5    JUSTIFICACIÓN.....	7
1.6    LIMITACIONES Y ALCANCES .....	8
1.6.1    Limitaciones .....	8
1.6.2    Alcances .....	9
1.7    ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	9
<b>CAPÍTULO 2 LA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE.....</b>	<b>11</b>
2.1    INTRODUCCIÓN .....	11
2.2    TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE .....	11
2.2.1    Transformada de Laplace.....	11
2.2.2    Errores de la Transformada Numérica de Laplace .....	12
2.2.2.1    Función Ventana .....	13
2.2.2.2    Factor de amortiguamiento .....	14
2.2.3    Discretización.....	14
2.2.3.1    TNL Inversa .....	14
2.2.3.2    TNL Directa.....	15

2.2.4	Validación Mediante Comparación con una Expresión Analítica .....	16
<b>2.3</b>	<b>APLICACIÓN SUCESIVA DE LA TNL INVERSA .....</b>	<b>16</b>
2.3.1	Transformación de $q$ a $z$ .....	18
2.3.2	Inversión Numérica Parcial Sucesiva .....	18
<b>2.4</b>	<b>VALIDACIÓN MEDIANTE COMPARACIÓN CON EXPRESIONES ANALÍTICAS .....</b>	<b>19</b>
2.4.1	Caso A .....	19
2.4.2	Caso B .....	21
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN EN EL DOMINIO Q-S.....</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>23</b>
<b>3.2</b>	<b>CÁLCULO DE PERFILES DE TENSIÓN Y CORRIENTE A LO LARGO DE LA LÍNEA .....</b>	<b>23</b>
3.2.1	Solución de las Ecuaciones del Telegrafista en el Dominio $q$ - $s$ .....	23
3.2.2	Cálculo de Tensiones y Corrientes al Inicio de la Línea .....	24
3.2.2.1	Tensiones al Inicio de la Línea .....	24
3.2.2.2	Corrientes al Inicio de la Línea .....	25
<b>3.3</b>	<b>APLICACIONES .....</b>	<b>26</b>
3.3.1	Aplicación a Devanados de Transformadores .....	26
3.3.2	Aplicación a Redes de Transmisión .....	28
3.3.3	Descargas Atmosféricas Directas .....	29
<b>3.4</b>	<b>CASOS DE PRUEBA .....</b>	<b>29</b>
3.4.1	Línea de Transmisión Aérea Multiconductora .....	30
3.4.2	Devanado de un Transformador .....	36
3.4.3	Arreglo Trifásico de Cables.....	40
3.4.4	Red de Transmisión.....	40
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>MODELADO DE LA LÍNEA ILUMINADA EN EL DOMINIO Q-S.....</b>	<b>48</b>
<b>4.1</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>48</b>
<b>4.2</b>	<b>CÁLCULO DE PERFILES DE TENSIÓN Y CORRIENTE A LO LARGO DE LA LÍNEA ILUMINADA .....</b>	<b>48</b>
4.2.1	Inclusión de los Campos Electromagnéticos Incidentes.....	48
4.2.2	Cálculo de las Tensiones y Corrientes al Inicio de la Línea .....	49
4.2.2.1	Tensiones al Inicio de la Línea .....	51
4.2.2.2	Corrientes al Inicio de la Línea .....	52
4.2.3	Obtención de los Perfiles de Tensión y Corriente en el Dominio del Tiempo .....	52
<b>4.3</b>	<b>CÁLCULO DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS INCIDENTES.....</b>	<b>52</b>

4.4	CASOS DE PRUEBA .....	54
4.4.1	Validación Mediante Comparaciones con ATP/EMTP .....	55
4.4.1.1	Caso A: Fuentes Distribuidas de Tensión. ....	55
4.4.1.2	Caso B: Fuentes Distribuidas de Corriente .....	57
4.4.2	Implementación de Campos Electromagnéticos Incidentes .....	58
4.4.2.1	Caso A .....	58
4.4.2.2	Caso B .....	60
4.4.2.3	Caso C .....	62
	<b>CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES .....</b>	<b>64</b>
5.1	CONCLUSIONES .....	64
5.2	APORTACIONES .....	66
5.3	RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS .....	66
	<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>67</b>
	<b>APENDICE A. CÁLCULO DE LA CORRIENTE EN LA BASE DEL CANAL DE DESCARGA. ....</b>	<b>73</b>
	<b>APENDICE B. PUBLICACIONES.....</b>	<b>75</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1. Ventana de Hanning.....	13
Figura 2.2. Gráfica obtenida al aplicar la TNL inversa a la ecuación (2.17). .....	17
Figura 2.3. Error relativo obtenido al comparar la TNL inversa con la evaluación de la función analítica.....	17
Figura 2.4. Gráfica en tres dimensiones obtenida con la aplicación sucesiva de la TNL inversa. ....	20
Figura 2.5. Diferencia relativa entre las definiciones numérica y analítica. ....	20
Figura 2.6. Gráfica en tres dimensiones obtenida con la aplicación sucesiva de la TNL inversa. ....	21
Figura 2.7. Diferencia relativa entre las definiciones numérica y analítica. ....	21
Figura 3.1. Circuito utilizado para el cálculo de $I_0s$ .....	26
Figura 3.2. Cálculo de $I_0s$ a partir del circuito $\pi$ equivalente de la línea. ....	26
Figura 3.3. Conexión en zig-zag de un modelo de línea multiconductora para un devanado de tres vueltas. ....	27
Figura 3.4. Vista transversal de la línea de transmisión considerada.....	30
Figura 3.5. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase A. ....	32
Figura 3.6. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase B. ....	32
Figura 3.7. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase C. ....	32
Figura 3.8. Simulación realizada en ATP/EMTP. ....	33
Figura 3.9. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase A. La línea está dividida en 32 segmentos en ATP/EMTP. ....	33
Figura 3.10. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase B. La línea está dividida en 32 segmentos en ATP/EMTP. ....	33
Figura 3.11. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase C. La línea está dividida en 32 segmentos en ATP/EMTP. ....	34

Figura 3.12. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase A. La línea está dividida en 4 segmentos en ATP/EMTP. ....	35
Figura 3.13. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase B. La línea está dividida en 4 segmentos en ATP/EMTP. ....	35
Figura 3.14. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase C. La línea está dividida en 4 segmentos en ATP/EMTP. ....	35
Figura 3.15. Esquemático del devanado utilizado en el caso de prueba [48]. ....	36
Figura 3.16. Perfil de tensión a lo largo de la primera vuelta del devanado. ....	38
Figura 3.17. Perfil de tensión a lo largo de la sexta vuelta del devanado. ....	38
Figura 3.18. Perfil de tensión a lo largo de la última vuelta del devanado. ....	39
Figura 3.19. Comparación entre la aplicación sucesiva (líneas continuas) y el análisis en el dominio de la frecuencia (líneas punteadas) al inicio de las vueltas. ....	39
Figura 3.20. Comparación entre la aplicación sucesiva (líneas continuas) y el análisis en el dominio de la frecuencia (líneas punteadas) a la mitad de las vueltas. ....	39
Figura 3.21. Vista transversal del arreglo utilizado. ....	40
Figura 3.22. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo del conductor de la fase A. ....	41
Figura 3.23. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo del blindaje de la fase A. ....	41
Figura 3.24. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo del blindaje de la fase B. ....	41
Figura 3.25. Gráfica en tres dimensiones del perfil de corriente a lo largo del conductor de la fase C. ....	42
Figura 3.26. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADEMTDC (líneas punteadas) para los conductores a la mitad del cable. ....	42
Figura 3.27. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADEMTDC (líneas punteadas) para los blindajes a la mitad del cable. ....	42
Figura 3.28. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADEMTDC (líneas punteadas) para los conductores la mitad del cable. ....	43

Figura 3.29. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADEMTDC (líneas punteadas) para los blindajes a la mitad del cable. ....	43
Figura 3.30. Red de transmisión utilizada para el caso de prueba. ....	44
Figura 3.31. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase A de la línea 2. ....	45
Figura 3.32. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase B de la línea 2. ....	45
Figura 3.33. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase C de la línea 2. ....	45
Figura 3.34. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase A de la línea 2. ....	46
Figura 3.35. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase B de la línea 2. ....	46
Figura 3.36. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase C de la línea 2. ....	46
Figura 3.37. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la línea 3. ....	47
Figura 4.1. Configuración geométrica de la interacción entre el canal de descarga y la línea de transmisión [36]. ....	50
Figura 4.2. Representación de los efectos de los campos electromagnéticos incidentes por fuentes de tensión y corriente al final de la línea. ....	51
Figura 4.3. Perfil de tensión a lo largo de la fase A con excitación de fuentes de tensión distribuidas. ....	55
Figura 4.4. Modelo de ATP utilizado para simular una línea iluminada. ....	56
Figura 4.5. Comparación del modelo de línea iluminada entre la aplicación sucesiva de la TNL inversa (línea continua) y ATP/EMTP (línea punteada). ....	56
Figura 4.6. Perfil de tensión a lo largo de la fase A con excitación de fuentes de corriente distribuidas. ....	57
Figura 4.7. Comparación del modelo de línea iluminada entre la aplicación sucesiva de la TNL inversa (línea continua) y ATP/EMTP (línea punteada). ....	57
Figura 4.8. Configuración geométrica para el caso A. ....	59
Figura 4.9. Perfil de tensión en la fase A. ....	59
Figura 4.10. Distribución de tensión a lo largo de la fase A. ....	59

Figura 4.11. Modelo utilizado en PSCAD/EMTDC para la validación del método.	60
Figura 4.12. Comparación entre los resultados de la aplicación sucesiva de la TNL inversa (línea sólida) y PSCAD/EMTDC (línea punteada).	60
Figura 4.13. Configuración geométrica para el caso B.	61
Figura 4.14. Perfil de tensión a lo largo de la fase A para el caso de prueba B.	61
Figura 4.15. Perfil de tensión a lo largo de la fase A.	61
Figura 4.16. Configuración geométrica para el caso C	62
Figura 4.17. Perfil de tensión a lo largo de la fase A para el caso de prueba C	62
Figura 4.18. Perfil de tensión a lo largo de la fase A.	62
Figura A.1. Forma de onda de la corriente en la base del canal de descarga.	74

## Lista de Tablas

Tabla 1.1 Clasificación de transitorios electromagnéticos por su origen e intervalo de frecuencia [2].....	2
Tabla 2.1. Ventanas utilizadas para evaluar la aplicación sucesiva de la TNL. ....	13
Tabla 3.1. Características de la línea .....	31
Tabla 3.2. Longitud de las líneas y radio de los conductores. ....	44
Tabla 3.3. Posición de los conductores. ....	44
Tabla 4.1. Datos de la línea de transmisión para los casos de prueba. ....	58
Tabla A.1. Parámetros de las funciones Heidler. ....	73

## Simbología

$B_x$	Campo magnético incidente en dirección x
$b$	Constante de amortiguamiento (espacial)
$c$	Constante de amortiguamiento (temporal)
<b>C</b>	Matriz de capacitancias
$C_a$	Capacitancia entre vueltas separadas por una vuelta
$C_b$	Capacitancia entre vueltas separadas por dos vueltas
$C_{FS}$	Capacitancia entre una vuelta y tierra
$C_{ID}$	Capacitancia entre discos adyacentes
$C_{IT}$	Capacitancia entre vueltas
$C_{LV}$	Capacitancia entre los devanados de alta y baja tensión
$E_r$	Campo eléctrico en la dirección r
$E_y$	Campo eléctrico en la dirección y
$F(q, s)$	Función en el dominio q-s
$F(z, t)$	Función en el dominio z-t
$H$	Altura de la nube
$h$	Altura de la línea
$I_F$	Vector de fuentes de corriente distribuidas
$I_{SCO}$	Fuente de corriente equivalente conectada en el extremo emisor
$I_{SCL}$	Fuente de corriente equivalente conectada en el nodo receptor
$I_{SO}$	Fuente de corriente en el nodo emisor
$I_{SL}$	Fuente de corriente en el nodo receptor
$I_i(q, s)$	Corriente a lo largo de la i-ésima línea de una red de transmisión en el dominio q-s
$I(q, s)$	Corriente a lo largo de la línea en el dominio q-s

$i(0, t)$	Corriente en la base del canal de descarga
$i(y, t)$	Corriente a lo largo del canal de descarga
$\mathbf{i}(z, t)$	Perfil de corriente a lo largo de la línea en el dominio del tiempo
$L$	Longitud de la línea
LCC	Módulo Line/Cable Constants del ATP/EMTP
$M$	Número de muestras en el espacio
$N$	Número de muestras en el tiempo
p.u.	Valor por unidad referido a la fuente de excitación
$q$	Variable de la frecuencia espacial
$r$	Frecuencia angular espacial
$s$	Variable de la frecuencia temporal
TNL	Transformada numérica de Laplace
$t$	Tiempo
$\mathbf{U}$	Matriz unidad
$\mathbf{V}_F$	Vector de fuentes de tensión distribuidas
$\mathbf{V}_0$	Tensión en el nodo emisor de la línea
$\mathbf{V}_L$	Tensión en el nodo receptor de la línea
$\mathbf{V}_S$	Tensión de la fuente de alimentación
$\mathbf{V}_i(q, s)$	Tensión a lo largo de la $i$ -ésima línea de una red de transmisión en el dominio q-s
$\mathbf{V}_i(s)$	Tensión en el $i$ -ésimo nodo de una red de transmisión en el dominio s
$\mathbf{V}(q, s)$	Tensió a lo largo de la línea en el dominio q-s
$\mathbf{v}(z, t)$	Perfil de tensión a lo largo de la línea en el dominio del tiempo
$\mathbf{Y}$	Matriz de admitancias
$\mathbf{Y}_0$	Matriz de admitancias características
$\mathbf{Y}_{con}$	Admitancia de continuidad entre vueltas de un devanado

$Y_L$	Admitancia del nodo receptor
$Y_S$	Admitancia del nodo emisor
$Z$	Matriz de impedancias
$Z_0$	Matriz de impedancias características
$\Gamma_v$	Factor de reflexión de la línea
$\Delta t$	Paso de tiempo discreto
$\Delta z$	Segmento de longitud
$\Delta\omega$	Discretización del espectro de frecuencia temporal
$\epsilon_0$	Permitividad del vacío
$\epsilon_{rt}$	Permitividad relativa del terreno
$\Phi$	Matriz cadena
$\rho(r)$	Función ventana en el espectro de la frecuencia espacial
$\sigma(\omega)$	Función ventana en el espectro de la frecuencia temporal
$\Omega$	Valor truncado del intervalo de integración
$\omega$	Frecuencia angular temporal

# Capítulo 1 Introducción

## 1.1 Generalidades

La energía eléctrica se ha convertido en un recurso vital para la sociedad actual, ya que es un recurso indispensable tanto en zonas rurales, como urbanas e industriales. Sin embargo, los centros de generación de energía generalmente se encuentran muy alejados de estos centros de consumo, por lo que es necesario conectar de alguna manera estas dos ubicaciones; este objetivo lo cumplen las líneas de transmisión, las cuales se extienden desde las plantas de generación hasta las subestaciones donde se realiza la distribución de la energía eléctrica.

Debido a que las líneas de transmisión cubren grandes distancias para cumplir con su propósito, son propensas a experimentar perturbaciones que pueden generar fallas en la red eléctrica e interrumpir el suministro de energía. Estas perturbaciones comúnmente se presentan en la forma de transitorios electromagnéticos. Un transitorio electromagnético se puede definir como el cambio repentino de estado de las condiciones del sistema eléctrico, debido a fenómenos como descargas atmosféricas o maniobras en la red [1].

Los transitorios electromagnéticos ocurren en periodos de tiempo extremadamente cortos (en el orden de microsegundos para descargas atmosféricas o milisegundos para maniobras). Los modelos existentes para representar los sistemas de transmisión pueden ser de parámetros concentrados o de parámetros distribuidos. Para el análisis de transitorios electromagnéticos generalmente se prefiere utilizar modelos de parámetros distribuidos, ya que estos se encuentran basados en las Ecuaciones del Telegrafista, las cuales toman en consideración el fenómeno de propagación de ondas a lo largo de la línea.

Los transitorios electromagnéticos pueden clasificarse de diferentes maneras. En la Tabla 1.1 se presenta una clasificación de acuerdo al origen del transitorio y al intervalo de frecuencia del frente de onda.

En el caso de transitorios debidos a descargas atmosféricas, estas pueden ser directas o indirectas:

- Una descarga es directa cuando impacta sobre la línea de transmisión, hilo de guarda o torre de transmisión. En estos casos las sobretensiones y sobrecorrientes pueden alcanzar valores muy elevados y el daño causado al sistema de aislamiento de la línea y los equipos conectados a ésta puede ser muy severo.

- Las descargas indirectas se refieren al caso en el cual la descarga atmosférica impacta el terreno cercano a la línea de transmisión. En esta situación se dice que la línea de transmisión se encuentra iluminada por los campos electromagnéticos incidentes generados por la descarga. Los transitorios electromagnéticos producidos por descargas indirectas no son tan severos como en el caso de las directas; sin embargo, el estudio de este fenómeno es de igual o mayor importancia que el de las descargas directas, debido a que sucede con una frecuencia mucho mayor. Las descargas atmosféricas indirectas tienen un mayor impacto en los sistemas de distribución, donde los sistemas de aislamiento se encuentran diseñados para soportar tensiones menores a las generadas por los campos incidentes. Debido a esto, los estudios relacionados con líneas iluminadas generalmente se hacen con líneas relativamente cortas en comparación con las de sistemas de transmisión.

Tabla 1.1 Clasificación de transitorios electromagnéticos por su origen e intervalo de frecuencia [2].

<b>Origen</b>	<b>Intervalo de frecuencia</b>
Ferorresonancia	0.1 Hz a 1 kHz
Rechazo de carga	0.1 Hz a 3 kHz
Liberación de falla	50 Hz a 3 kHz
Maniobra de interruptores	50 Hz a 20 kHz
Tensiones transitorias de recuperación	50 Hz a 100 kHz
Descargas atmosféricas	10 kHz a 3 MHz
Maniobras en subestaciones aisladas en gas (GIS)	100 kHz a 50 MHz

En el caso de las maniobras en la red eléctrica, se originan transitorios que generalmente tienen frentes de onda más lentos que los de descargas atmosféricas. Debido a que las sobretensiones alcanzadas por estos transitorios dependen directamente de la tensión de operación del sistema, generalmente su análisis no es de mucha importancia para sistemas de distribución, pero para sistemas de alta tensión (230 kV o mayores) su estudio toma precedencia sobre el de descargas atmosféricas.

El estudio de transitorios no se limita a líneas de transmisión aéreas, ya que estos también ocurren en otros elementos del sistema eléctrico como lo son

transformadores, redes de transmisión subterránea, máquinas rotatorias, entre otros.

Los transitorios pueden tener efectos negativos en la red eléctrica; por ejemplo, las tensiones tan elevadas que se llegan a alcanzar pueden ocasionar la ruptura en el sistema de aislamiento de los elementos que forman parte de la red. Por otro lado, las altas corrientes alcanzadas sobrecalientan los conductores, lo que puede causar un envejecimiento prematuro de los dieléctricos causando una falla temprana en estos. Además, las corrientes altas pueden causar deformaciones en el devanado de transformadores.

De acuerdo con lo anterior, conocer las tensiones y corrientes que pueden causar los diversos tipos de transitorios electromagnéticos es de suma importancia para el diseño de los elementos que forman parte de la red eléctrica, así como para el diseño y la coordinación de sus protecciones.

## **1.2 Objetivo**

El objetivo de este trabajo es desarrollar un algoritmo basado en la aplicación sucesiva de la transformada numérica de Laplace para el cálculo de perfiles transitorios de tensión y corriente a lo largo de sistemas de transmisión, como lo son líneas de transmisión aéreas y subterráneas, devanados de transformadores y redes de transmisión, ante dos condiciones:

- Excitación mediante fuentes concentradas (maniobra de interruptores y descarga atmosférica directa).
- Excitación mediante fuentes distribuidas (campos electromagnéticos incidentes debidos a una descarga atmosférica indirecta).

## **1.3 Antecedentes**

El estudio de transitorios electromagnéticos es de gran importancia para el diseño de las líneas de transmisión que forman parte de la red eléctrica. Los primeros métodos utilizados para este tipo de estudio consistían en métodos gráficos, entre los que destacan el método de Bergeron y el método de Bewley [3]. Sin embargo, estos métodos no toman en cuenta la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea. Esta dependencia se debe al efecto piel en los conductores y en el retorno por tierra.

A partir del método de Bergeron y la regla de integración trapezoidal, Dommel desarrolló un programa computacional para el análisis de transitorios electromagnéticos [4], el cual se conoce como “*Electromagnetic Transients*”

*Program*” (EMTP). A partir del EMTP surgieron otros programas computacionales para el análisis de transitorios, como lo son el “*Alternative Transient Program*” (ATP) desarrollado por Meyer en 1974 y el “*Electromagnetic Transients for Direct Current*” (EMTDC) desarrollado por Woodford en 1975.

Budner [5] y Snelson [6] fueron los primeros en proponer modelos que consideran la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea en 1970 y 1972, respectivamente. En 1974, Meyer y Dommel aplicaron la técnica de Snelson para incluir la dependencia frecuencial de la línea en el EMTP [7], donde las convoluciones se resuelven por medio de la regla trapezoidal. En 1975, Semlyen y Dabuleanu propusieron un método para la solución recursiva de las convoluciones [8]. En 1982, J. Martí propuso un modelo en el que la impedancia característica se representa por medio de una red para un intervalo de frecuencias [9]. En 1988, L. Martí desarrolló una técnica que toma en cuenta la dependencia de la frecuencia de las matrices de transformación [10]. En 1988, Gustavsen y Semlyen desarrollaron un método en el dominio de fases de la admitancia característica y la función de propagación utilizando el método de ajuste vectorial, en donde los elementos de cada columna de la matriz de transformación se ajustan usando los mismos polos [11]. En 1999, Morched et al. propusieron un modelo en el dominio de fases capaz de simular sistemas con alta dependencia de la frecuencia, el cual se conoce como “Modelo Universal de la Línea de Transmisión”, el cual hace un ajuste adecuado de la impedancia característica y la función de propagación por medio de una aproximación racional.

Todos estos modelos trabajan en el dominio del tiempo, y por lo tanto no pueden incluir de manera directa la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea; para tomar en cuenta esta dependencia, se utilizan aproximación y consideraciones que pueden producir errores al aplicarse a sistemas altamente dependientes de la frecuencia [12].

Debido a lo anterior, se desarrolló un enfoque alterno para el análisis de transitorios electromagnéticos, donde los modelos se implementan en el dominio de la frecuencia y los resultados se convierten al dominio del tiempo aplicando la transformada numérica de Laplace inversa. Al trabajar en este dominio se tiene la ventaja de que la dependencia de la frecuencia de los parámetros se toma en cuenta de manera directa y sencilla sin la necesidad de aproximaciones numéricas.

Las primeras investigaciones relacionadas con el análisis de transitorios electromagnéticos en el dominio de la frecuencia fueron realizados por S. J. Day et al. [13]. Debido a que los resultados en el dominio del tiempo presentaban errores de aliasing y oscilaciones de Gibbs, se introdujo a la transformada de Fourier una función ventana [14] y un factor de amortiguamiento [15], llamando a esta técnica transformada modificada de Fourier (MFT, por sus siglas en inglés).

Posteriormente, Wedepohl aplicó la MFT para el análisis de líneas multiconductoras [16] y sistemas de cables subterráneos [17]. En 1965, Cooley y Tukey implementaron el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) [18], y en 1973, Ametani utilizó este algoritmo para el análisis transitorio, reduciendo considerablemente el tiempo de cómputo utilizado por la MFT [19].

Posteriormente, Wilcox explicó la MFT en términos de la teoría de Laplace, e introdujo el término transformada numérica de Laplace [20]. A partir de estas aportaciones se han hecho desarrollos en el área de estudio de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión y otros elementos de la red eléctrica.

Por otro lado, también se han hecho avances importantes en el estudio de los campos electromagnéticos incidentes en una línea de transmisión debidos a una descarga atmosférica indirecta. Para el cálculo de estos campos, Master y Uman propusieron en 1978 una formulación que considera al terreno como un conductor perfecto, y toma en cuenta variables como el punto de impacto de la descarga respecto a la línea y la corriente de retorno en la base del canal de la descarga [21].

En 1985, Heidler propuso una expresión analítica para la corriente de retorno en la base del canal de descarga [22], la cual consiste en la superposición de dos funciones tipo Heidler. Se prefiere utilizar esta expresión en lugar de la función doble exponencial tradicional, ya que permite el ajuste de algunos componentes de la forma de onda [23].

En 1996, Rachidi et al. evaluaron la aplicación de la fórmula de Cooray-Rubinstein al método de cálculo de campos electromagnéticos de Master y Uman para la consideración del terreno con una conductividad finita [24].

La combinación de los desarrollos en las áreas de modelado de líneas de transmisión y cálculo de campos electromagnéticos incidentes han permitido avances en el análisis de los transitorios electromagnéticos de líneas de transmisión debidos a descargas atmosféricas indirectas, lo cual es de gran importancia para el diseño y coordinación de aislamiento.

## **1.4 Estado del Arte**

El campo del análisis transitorio de líneas de transmisión iluminadas ha tenido avances considerables en los últimos años. A continuación se presentan algunos de los trabajos más destacados respecto a este tema. En esta sección también se presentan algunos de los trabajos realizados en el estudio de transitorios en líneas de transmisión en el dominio  $q$ -s.

En 1978, Taylor et al. desarrollaron un método en el que se aproximan los campos electromagnéticos incidentes en la línea de transmisión por medio de fuentes de tensión y corriente distribuidas a lo largo de la línea [25].

En 1980, Agrawal et al. propusieron un modelo en donde se consideran fuentes equivalentes al valor neto de la componente horizontal del campo eléctrico para el cálculo de la función de excitación de la línea [26].

En 1993, Rachidi propuso una formulación para el cálculo de las tensiones en una línea iluminada por campos incidentes donde solamente se consideran las componentes del campo magnético. Este método resulta interesante cuando el campo incidente se determina experimentalmente, ya que solamente se necesita la medición del campo magnético [27].

En 1994 y 1995 C. Paul desarrolló un modelo para la inclusión de campos electromagnéticos incidentes en circuitos electrónicos, donde los campos se representan por medio de fuentes de corriente y de tensión conectadas al final de la línea [28], [29].

En 1997, Omid et al. estudiaron la respuesta en el tiempo de la línea de transmisión iluminada uniforme y no uniforme. En este trabajo se llegó a una solución de las corrientes en los extremos de la línea, en función de los parámetros y de las tensiones en los extremos de la misma. La no uniformidad se tomó en cuenta aplicando la conexión en cascada de matrices cadena [30].

En 2001, Erdin et al. implementaron un modelo para el análisis de campos incidentes en líneas de transmisión en el dominio del tiempo. Este modelo se basa en la aproximación racional de la matriz exponencial descrita por las ecuaciones del telegrafista y en la aproximación racional de las funciones de convolución [31].

En 2003 Brancik presentó un método para la simulación de circuitos de transmisión electrónicos excitados por fuentes concentradas mediante la transformada de Laplace en dos dimensiones. Este método utiliza la transformada rápida de Fourier en conjunto con el algoritmo de diferencia de cocientes para obtener la solución en el dominio del tiempo. En este trabajo no se considera la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea [32].

En 2005 Gómez et al. presentaron dos métodos en el dominio de la frecuencia para el análisis de una línea de transmisión no uniforme e iluminada. En el primero se utiliza la conexión cascada de matrices cadena, y en el segundo se resuelve por medio de un sistema lineal variante en el espacio. Los campos electromagnéticos incidentes se representan por fuentes concentradas de tensión y corriente conectadas en los extremos de la línea [33].

En 2005 y 2006 Shinh et al. presentaron un algoritmo que utiliza la teoría de la línea de transmisión multiconductora con parámetros dependientes de la

frecuencia par el análisis de circuitos electrónicos. Los campos incidentes se representan por medio de fuentes de corrientes y tensión en los extremos de la línea [34], [35].

En 2008, Escamilla implementó un modelo de parámetros distribuidos en el dominio de la frecuencia para el análisis de sobretensiones transitorias en líneas de transmisión monofásicas no uniformes debidas a campos electromagnéticos incidentes [36].

En 2009 y 2013, Gómez y Escamilla presentaron un modelo para el análisis de sobretensiones transitorias en líneas de transmisión multiconductoras no uniformes e iluminadas. El modelo de la línea excitada por un campo externo se basa en las formulaciones de Taylor, y los campos incidentes debidos a la descarga atmosférica se calculan con las expresiones definidas por Master y Uman. También se implementa la inclusión de elementos no lineales en la línea por medio de una combinación de aproximaciones piezolineales y el principio de superposición [37] [38].

En 2011, Borghetti et al. presentaron los efectos que pueden tener edificios cercanos en las tensiones inducidas por campos incidentes en líneas de transmisión. En este trabajo se muestra que la presencia de edificios cercanos al canal de descarga puede causar una reducción en las tensiones inducidas en la línea de transmisión. El trabajo se realizó utilizando el método del elemento finito en una geometría en tres dimensiones [39].

En 2013, Sheshyekani y Akbari hicieron un estudio para analizar la influencia de la dependencia de la frecuencia de la conductividad y la permitividad del terreno en las tensiones inducidas en líneas de transmisión iluminadas. Se mostró que las tensiones inducidas pueden variar significativamente cuando la conductividad del terreno es de baja a moderada. Sin embargo, para terrenos con alta conductividad puede tomarse en cuenta al terreno como conductor perfecto. El trabajo se realizó mediante modelos implementados empleado el método del elemento finito [40].

## **1.5 Justificación**

En la actualidad el suministro confiable de energía eléctrica es una de las necesidades de la sociedad para funcionar correctamente, por lo que es necesario que los elementos que conforman la red eléctrica sean diseñados correctamente para que tengan una operación confiable y no sufran fallas que puedan ocasionar interrupciones del servicio. Uno de los factores más importantes que se tienen que tomar en cuenta en el diseño de líneas de transmisión, transformadores y elementos de la red eléctrica en general es el comportamiento de estos ante transitorios electromagnéticos, ya que las tensiones y corrientes que se pueden

alcanzar debido a estos fenómenos pueden causar una falla en algún elemento de la red eléctrica afectando el suministro de energía.

Conocer las sobretensiones que pueden alcanzar estos elementos ante transitorios electromagnéticos permite una mejor coordinación de aislamientos, de manera que disminuya la posibilidad de una falla ante este tipo de fenómenos.

Los programas de simulación para el análisis transitorio más populares que existen en la actualidad son ATP/EMTP, PSCAD/EMTDC y EMTP-RV. Sin embargo, los modelos que utilizan estos programas solamente proporcionan mediciones de tensión y corriente en los extremos de la línea de transmisión, y no proporcionan información sobre el comportamiento en puntos internos de la línea. Para obtener información sobre el comportamiento interno es necesario dividir la línea en diferentes segmentos y colocar elementos de medición entre cada segmento; si se requiere la generación de un perfil de tensión o corriente a lo largo de la línea es necesario dividirla en una gran cantidad de segmentos, lo cual requiere una cantidad considerable de tiempo por el usuario para la generación del modelo y, si los datos de la línea se modifican, es necesaria la modificación de todos los segmentos, lo cual también consume una cantidad considerable de tiempo. Es por esto que estos programas de cómputo no son alternativas viables para el análisis transitorio de puntos internos a lo largo de líneas de transmisión.

Por otro lado, estos programas no cuentan con modelos que consideren líneas de transmisión iluminadas por campos electromagnéticos incidentes, por lo que es muy complicado realizar un estudio del comportamiento transitorio de las líneas debido a descargas atmosféricas indirectas.

Debido a lo anterior, en este trabajo se plantea la implementación de un método que aplica la transformada de Laplace de manera sucesiva para resolver las Ecuaciones del Telegrafista, y con esto obtener los perfiles de tensión y corriente a lo largo de las líneas de transmisión en el dominio del tiempo de manera sencilla. Además, se aplica el método propuesto para el análisis transitorio de líneas iluminadas por campos electromagnéticos incidentes.

## **1.6 Limitaciones y Alcances**

### **1.6.1 Limitaciones**

- El modelo implementado en este trabajo es para una línea uniforme, ya que no considera modificaciones longitudinales en los parámetros eléctricos, tales como catenaria entre torres, cambio en las características del terreno o transposiciones.

- El modelo no considera la inclusión de elementos no lineales ni variantes en el tiempo, tales como apartarrayos o interruptores.

### **1.6.2 Alcances**

- El método implementado permite obtener los perfiles de tensión y corriente a lo largo de una línea de transmisión en el dominio del tiempo, lo cual es muy difícil de calcular con el software de análisis transitorio actual.
- El modelo desarrollado toma en cuenta transitorios debidos a maniobras en la red, descargas atmosféricas directas y transitorios debidos a campos incidentes producidos por descargas atmosféricas indirectas.
- Se realizó la implementación del modelo desarrollado para obtener perfiles transitorios de tensión o corriente en otros elementos de la red eléctrica, tales como devanados de transformadores y sistemas de transmisión subterráneos.
- Debido a que el modelo de línea utilizado se desarrolló en el dominio de la frecuencia, es posible incluir de manera sencilla la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos. Además, el uso de la transformada de Laplace permite convertir las Ecuaciones del Telegrafista, que consisten en ecuaciones diferenciales parciales, en ecuaciones algebraicas, las cuales se pueden resolver de una manera sencilla, y posteriormente se aplica la transformada numérica de Laplace inversa para obtener la solución en el dominio  $z-t$ .

## **1.7 Estructura de la Tesis**

- *Capítulo 1 Introducción.* Consiste en la presente introducción; contiene el objetivo, la justificación, los antecedentes, alcances y limitaciones, y estado del arte del presente trabajo.
- *Capítulo 2 La Transformada Numérica de Laplace.* Presenta la implementación de la transformada numérica de Laplace inversa y su aplicación sucesiva para la obtención de soluciones en el dominio  $z-t$  a partir de funciones en el dominio  $q-s$ .
- *Capítulo 3 Modelado de Líneas de Transmisión en el Dominio  $q-s$ .* Se aplica de manera sucesiva la transformada de Laplace en el dominio  $z-t$  para obtener ecuaciones algebraicas en el dominio  $q-s$ ; se desarrolla la solución de estas ecuaciones para las tensiones y corrientes a lo largo de la línea y se aplica la transformada numérica de Laplace inversa para obtener los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea en el

dominio del tiempo. En este capítulo también presenta la aplicación del método desarrollado a transformadores y líneas de transmisión subterráneas.

- *Capítulo 4 Modelado de Líneas de Transmisión Iluminadas.* Se implementa el método desarrollado en el Capítulo 3 para obtener los perfiles de tensión y corriente transitorios de una línea de transmisión iluminada por campos electromagnéticos incidentes debidos a una descarga atmosférica indirecta.
- *Capítulo 5 Conclusiones.* Se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado. También se hacen recomendaciones sobre trabajos futuros para seguir desarrollando lo presentado aquí.

## Capítulo 2 La Transformada Numérica de Laplace

### 2.1 Introducción

La transformada de Laplace es una herramienta utilizada en el análisis y solución de ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones integrales, ya que al llevar este tipo de ecuaciones al dominio de Laplace, se simplifican convirtiéndose en operaciones algebraicas, las cuales son más sencillas de resolver. Una vez resueltas, se pueden llevar al dominio de las variables originales a través de tablas de transformaciones o analíticamente.

Por lo anterior, la transformada de Laplace es muy útil en diversas áreas de la Ingeniería en donde se requiere encontrar la solución de sistemas de ecuaciones que modelan fenómenos reales. Sin embargo, en estos casos las soluciones obtenidas en el dominio de Laplace son muy complicadas, y es muy difícil o imposible transformar las soluciones a su dominio original con los métodos tradicionales. Es por esto que es necesario apoyarse de herramientas numéricas para poder llevar dichas soluciones a su dominio original. Una herramienta que ha demostrado buenos resultados para este propósito es la transformada numérica de Laplace (TNL).

En este capítulo se describe brevemente el funcionamiento e implementación de la TNL. Para una revisión más detallada de este método se puede consultar [41], [42] y [43]. Adicionalmente, se describe la aplicación de la TNL de manera sucesiva para el caso de ecuaciones dependientes de espacio y tiempo.

### 2.2 Transformada Numérica de Laplace

#### 2.2.1 Transformada de Laplace

Sea  $f(t)$  una función en el dominio del tiempo; su imagen en el dominio de la frecuencia al aplicarle la transformada de Laplace se define como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

y la transformada de Laplace inversa se obtiene de una integral evaluada en  $c + j\omega$ , donde  $c$  es una constante y  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ , obteniendo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.2)$$

Al sustituir  $s = c + j\omega$  en (2.1):

$$F(s) = \int_0^{\infty} [f(t)e^{-ct}]e^{-j\omega t} dt \quad (2.3)$$

Para (2.2) se cambia la variable de integración de  $s$  a  $\omega$ , tomando en cuenta que  $c$  es constante, por lo que  $ds = d\omega$ , quedando la transformada de Laplace inversa como:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

donde  $c$  es una constante de amortiguamiento y  $\omega$  es la frecuencia angular. Se puede observar que si  $c$  es igual a cero, las ecuaciones (2.3) y (2.4) corresponden a la transformada de Fourier para  $f(t)$  causal.

Para  $f(t)$  causal y real, la transformada de Laplace inversa se puede escribir como:

$$f(t) = \text{Re} \left\{ \frac{e^{ct}}{\pi} \int_0^{\infty} F(s)e^{j\omega} d\omega \right\} \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Errores de la Transformada Numérica de Laplace

Para poder evaluar numéricamente a (2.5) es necesario el truncamiento de la frecuencia de integración a un valor finito, así como la discretización de la variable continua  $\omega$ . Estas acciones dan lugar a dos tipos de errores numéricos:

- Oscilaciones de Gibbs. Aparecen debido al truncamiento del rango de integración. Este tipo de oscilaciones aparecen en las discontinuidades de las funciones analizadas, y se deben al hecho de que se trata de aproximar una función discontinua a través de una serie finita de suma de ondas seno y coseno. Estos errores se pueden reducir con la introducción de una función ventana  $\sigma(\omega)$ .
- Errores de discretización. Se deben a la discretización de la variable continua  $\omega$ . Este tipo de error se reduce suavizando la respuesta del sistema en la frecuencia mediante el uso de un factor de amortiguamiento  $c$ .

### 2.2.2.1 Función Ventana

Para reducir los errores que aparecen por las oscilaciones de Gibbs se emplean funciones de peso conocidas como “ventanas” o filtros. Existen diferentes tipos de funciones ventana que se pueden aplicar en la TNL inversa.

Las funciones ventana consideradas inicialmente para el desarrollo de este trabajo fueron la de Lanczos, de Hamming y de Hanning, las cuales se presentan en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Ventanas utilizadas para evaluar la aplicación sucesiva de la TNL.

Función ventana	Ecuación
Ventana de Lanczos	$\sigma(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)}{\frac{\pi\omega}{\Omega}}$
Ventana de Hamming	$\sigma(\omega) = \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)$
Ventana de Hanning	$\sigma(\omega) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)}{2}$

De la tabla 2.1,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\Omega$  es el valor truncado del intervalo de integración y  $\alpha$  vale 0.54.

Al implementar las funciones ventana mencionadas en la aplicación sucesiva de la TNL, la ventana de Hanning es la que presentó mejores resultados, por lo que es la que se utiliza a lo largo de este trabajo. En la Figura 2.1 se presenta la gráfica de la ventana de Hanning para un muestreo de  $2^{10}$ .

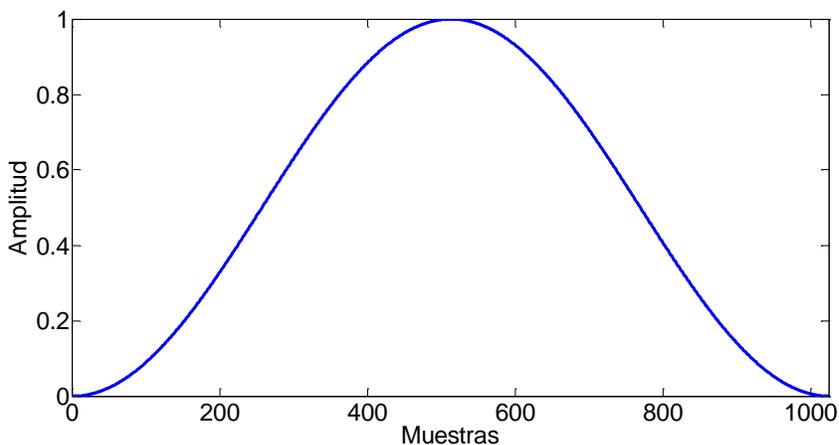


Figura 2.1. Ventana de Hanning

### 2.2.2.2 Factor de amortiguamiento

Para disminuir los errores por discretización o aliasing se utiliza un factor de amortiguamiento  $c$ . Al igual que la función ventana, existen diferentes valores de  $c$  que se pueden elegir para aplicarse en la TNL inversa. Generalmente este factor se determina de manera heurística. Para este trabajo el factor de amortiguamiento  $c$  con el que se obtuvieron mejores resultados se obtiene definiendo el error como [43]:

$$\varepsilon = \exp(-cT) \quad (2.6)$$

donde  $T$  es el tiempo de observación de la función y  $\varepsilon$  es el error deseado. Al resolver (2.6) para  $c$ , se tiene:

$$c = -\frac{\ln(\varepsilon)}{T} \quad (2.7)$$

Este criterio da buenos resultados utilizando valores de  $\varepsilon$  entre  $1 \times 10^{-3}$  y  $1 \times 10^{-5}$  [43]. Sin embargo, se ha observado que la reducción del error también depende del número de muestras empleado al momento de la discretización.

### 2.2.3 Discretización

En esta sección se obtienen las formas discretas de la TNL (inversa y directa) a partir de la definición analítica de la transformada de Laplace.

#### 2.2.3.1 TNL Inversa

Partiendo de (2.5), si se considera un intervalo finito de integración  $\Omega$  y se introduce la función ventana  $\sigma(\omega)$ , se tiene:

$$f(t) \cong \frac{e^{ct}}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\Omega} F(s) \sigma(\omega) e^{j\omega} d\omega \right\} \quad (2.8)$$

La discretización de (2.8) puede hacerse de dos maneras, ya sea empleando un muestreo convencional o un muestreo impar. En este trabajo se obtuvieron mejores resultados empleando el muestreo convencional, que al aplicarlo a (2.8) se obtiene la siguiente forma discreta:

$$f_n = \frac{e^{cn \Delta t}}{\Delta t} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m \sigma_m e^{2\pi j m n / N} \right\} \text{ para } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.9)$$

donde  $N$  es el número de muestras empleadas y

$$F_m = \begin{cases} F(c + jm\Delta\omega) & \text{para } m = 0, 1, \dots, N/2 \\ F[c + j(m - N)\Delta\omega] & \text{para } m = N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$f_n = f(n \Delta t) \quad (2.11)$$

$$\Delta t = T/N \quad (2.12)$$

$$\Delta \omega = 2\pi/T \quad (2.13)$$

La expresión dada en (2.9) es el algoritmo de la TNL inversa, el cual puede codificarse de manera sencilla en un programa de cómputo. Además, el término entre corchetes corresponde a la Transformada Rápida de Fourier Inversa, lo que simplifica notablemente la implementación del algoritmo de la TNL inversa.

Con la aplicación de este algoritmo es posible transformar soluciones de ecuaciones en el dominio de Laplace a su dominio original, donde es más fácil interpretarlas y estudiarlas.

### 2.2.3.2 TNL Directa

Al igual que para la transformada de Laplace inversa, también existe un algoritmo para realizar la transformada de Laplace directa numéricamente. El uso de este algoritmo no es tan amplio como el de la transformada inversa, ya que generalmente lo que se requiere es obtener soluciones en el tiempo a partir de funciones en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, la importancia de este algoritmo se encuentra en el hecho de que permite la transformación al dominio de Laplace de expresiones no analíticas, las cuales se pueden utilizar como entradas en funciones que se encuentran en el dominio de la frecuencia. Esta aplicación se presenta posteriormente en este trabajo.

La forma de evaluar en forma discreta a (2.3) con un intervalo finito de integración y aplicando un muestreo convencional es:

$$F_m = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-cTn/N} e^{-j2\pi mn/N} \quad (2.14)$$

donde  $F_m$  está definida en (2.10).

Las dos definiciones numéricas de la transformada de Laplace (inversa y directa) son la base para el desarrollo de este trabajo, y son herramientas que han permitido grandes avances en el estudio transitorio de sistemas eléctricos [42].

#### 2.2.4 Validación Mediante Comparación con una Expresión Analítica

Con propósitos de validación, se hace la comparación entre el resultado obtenido al aplicar la TNL inversa a una expresión en el dominio de la frecuencia y el resultado obtenido al evaluar la función directamente en el dominio del tiempo.

Se considera la expresión:

$$f(t) = \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

Cuyo equivalente en el dominio de la frecuencia es:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (2.16)$$

donde  $\omega = 377$ , teniendo un tiempo de observación de 20 ms, y utilizando 1024 muestras.

Al aplicar la TNL inversa a (2.16) se obtiene la gráfica que se presenta en la Figura 2.2.

En la Figura 2.3 se presenta la diferencia relativa entre el resultado obtenido al aplicar la TNL inversa y la solución obtenida al evaluar la función analítica, la cual se calcula como:

$$diff = \left| \frac{f_n(z, t) - f_a(z, t)}{\max[f_a(z, t)]} \right| \quad (2.17)$$

donde  $f_n(z, t)$  corresponde al resultado obtenido numéricamente y  $f_a(z, t)$  es el valor analítico de la función.

Se puede observar que el nivel del error se mantiene en niveles muy pequeños en casi toda la curva, y sólo existe un pico al inicio de la gráfica, el cual corresponde a la discontinuidad existente de la función, y es de esperarse al evaluar numéricamente expresiones con tales discontinuidades.

De acuerdo con lo presentado en esta sección se puede ver que la aplicación de la TNL inversa permite obtener funciones en el tiempo a partir de expresiones en la frecuencia con un nivel aceptable de exactitud.

### 2.3 Aplicación Sucesiva de la TNL Inversa

En la sección anterior se presenta la aplicación de la TNL inversa para la transformación de expresiones del dominio  $s$  (frecuencia temporal) al dominio  $t$  (tiempo). Sin embargo, la aplicación de la TNL inversa no se encuentra limitada solamente a transformaciones entre esos dominios, sino que se extiende a cualquier par de dominios análogos a los presentados. En esta sección se presenta como se puede aplicar la TNL inversa para la transformación de

expresiones en el dominio  $q$  (frecuencia espacial) al dominio  $z$  (espacio). También se hace la implementación de la aplicación sucesiva de la TNL inversa, lo cual permite trabajar con funciones que dependen de más de una variable. En este trabajo la aplicación sucesiva de la TNL inversa permite la transformación de expresiones en el dominio  $q$ - $s$  al dominio  $z$ - $t$ . Por motivos de simplicidad, cuando se hable del dominio de la frecuencia en este trabajo se estará refiriendo al dominio de la frecuencia temporal ( $s$ ), y cuando se hable de la frecuencia espacial ( $q$ ), se indicará explícitamente.

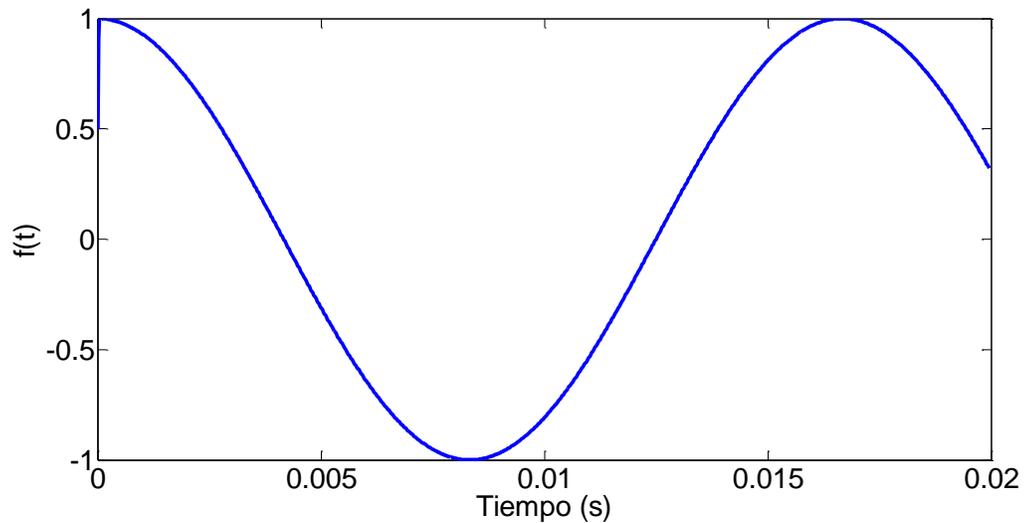


Figura 2.2. Gráfica obtenida al aplicar la TNL inversa a la ecuación (2.17).

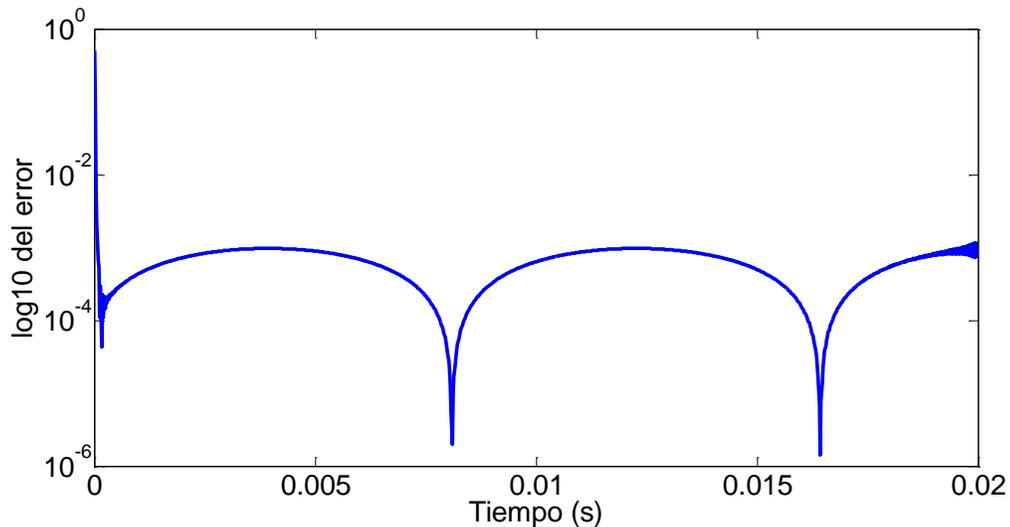


Figura 2.3. Error relativo obtenido al comparar la TNL inversa con la evaluación de la función analítica.

### 2.3.1 Transformación de $q$ a $z$

El proceso para obtener la TNL inversa respecto a la coordenada  $z$  es completamente análogo al que se sigue para la transformación de  $s$  a  $t$ . La expresión analítica para la transformada de Laplace inversa correspondiente es:

$$g(z) \cong \frac{e^{bz}}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^R G(q) e^{jrz} dr \right\} \quad (2.18)$$

La forma discreta de (2.18) es:

$$g_n = \frac{e^{bn\Delta z}}{\Delta z} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} G_m \rho_m e^{2\pi jmn/M} \right\} \text{ para } n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.19)$$

donde  $M$  es el número de muestras,  $b$  es el factor de amortiguamiento,  $\rho_m$  es la función ventana,  $L$  la longitud a evaluar y

$$G_m = \begin{cases} F(b + jm\Delta r) & \text{for } m = 0, 1, \dots, M/2 \\ F[b + j(m - M)\Delta r] & \text{for } m = M/2 + 1, \dots, M - 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$g_n = g(n\Delta z) \quad (2.21)$$

$$\Delta z = L/M \quad (2.22)$$

$$\Delta \omega = 2\pi/L \quad (2.23)$$

Las modificaciones aplicadas a la TNL inversa para transformar expresiones del dominio  $q$  al dominio  $z$  se puede generalizar para cualquier par de dominios. La TNL directa se puede modificar de una manera similar para la transformación de expresiones del dominio  $z$  al dominio  $q$ .

### 2.3.2 Inversión Numérica Parcial Sucesiva

En esta sección se plantea la teoría que permite la aplicación sucesiva de la TNL inversa, lo que hace posible llevar a su dominio original a expresiones a las que se les ha aplicado dos veces la transformada de Laplace respecto a diferentes variables.

Para empezar, se define la transformada de Laplace parcial inversa como:

$$f(z) = \mathcal{L}_z^{-1}\{F(q)\} \quad (2.24)$$

$$f(t) = \mathcal{L}_t^{-1}\{F(s)\} \quad (2.25)$$

y dado que la transformada de Laplace es un operador lineal, se puede aplicar esta propiedad para obtener:

$$f(z, t) = \mathcal{L}_z^{-1}\{\mathcal{L}_t^{-1}\{F(q, s)\}\} = \mathcal{L}_t^{-1}\{\mathcal{L}_z^{-1}\{F(q, s)\}\} \quad (2.26)$$

De (2.26) se tiene que es posible, por medio de la aplicación sucesiva de la transformada de Laplace inversa, obtener funciones en el dominio  $z-t$  a partir de expresiones en el dominio  $q-s$ . Si la expresión en el dominio  $q-s$  no tiene una transformación sencilla al dominio  $z-t$ , se puede aplicar la TNL inversa de manera sucesiva para obtener el resultado en el dominio  $z-t$ . Este hecho es de gran importancia, ya que es la base para los desarrollos presentados más adelante en este trabajo.

## 2.4 Validación Mediante Comparación con Expresiones Analíticas

En esta sección se hace la validación de la aplicación sucesiva de la TNL inversa mediante comparaciones con expresiones analíticas. Se presentan dos casos de prueba. Para estas comparaciones se presenta una expresión analítica en el dominio  $z-t$ , a la cual se le aplica dos veces la transformada de Laplace (una vez respecto a cada parámetro) y se muestra la expresión resultante en el dominio  $q-s$ . A esta última expresión se le aplica la TNL inversa de manera sucesiva como se presenta en (2.26), y se compara el resultado obtenido con la expresión original. En ambos casos se utilizan 1024 muestras para ambos parámetros ( $t$  y  $z$ ). Sin embargo, esto no es un requerimiento del método, pudiéndose utilizar otro número de muestras para cualquiera de los parámetros siempre y cuando se cumpla con la condición de Courant-Friedrichs-Lewy [44]. Esta es una condición necesaria para la estabilidad de los métodos numéricos y establece que, para una onda que se propaga a lo largo de un mallado en el espacio, los pasos de tiempo utilizados deben ser iguales o menores al tiempo que le toma a la onda viajar de un punto del mallado al siguiente, y se define como:

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} \leq c \quad (2.27)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo,  $\Delta z$  es el paso espacial y  $c$  es la velocidad de propagación de la onda.

### 2.4.1 Caso A

Se considera la siguiente expresión:

$$f(z, t) = \sin(t) + \cos(z) \quad (2.28)$$

cuya definición en el dominio  $q-s$  es:

$$F(q, s) = \frac{1}{q(s^2 + 1)} + \frac{q}{s(q^2 + 1)} \quad (2.29)$$

En la Figura 2.4 se presenta la gráfica obtenida en el dominio  $z-t$  tras aplicar de manera sucesiva la TNL inversa a (2.29). En esta gráfica se presenta el comportamiento de la función en tres dimensiones, donde los ejes horizontales

corresponden a los parámetros de la función (en este caso  $z$  y  $t$ ), y el eje vertical representa la magnitud que alcanza la función en el punto  $z,t$ .

En la Figura 2.5 se muestra la comparación entre los resultados numérico y analítico mediante el cálculo de la diferencia relativa. Se puede observar que la diferencia se encuentra por debajo del 0.18% para toda la gráfica.

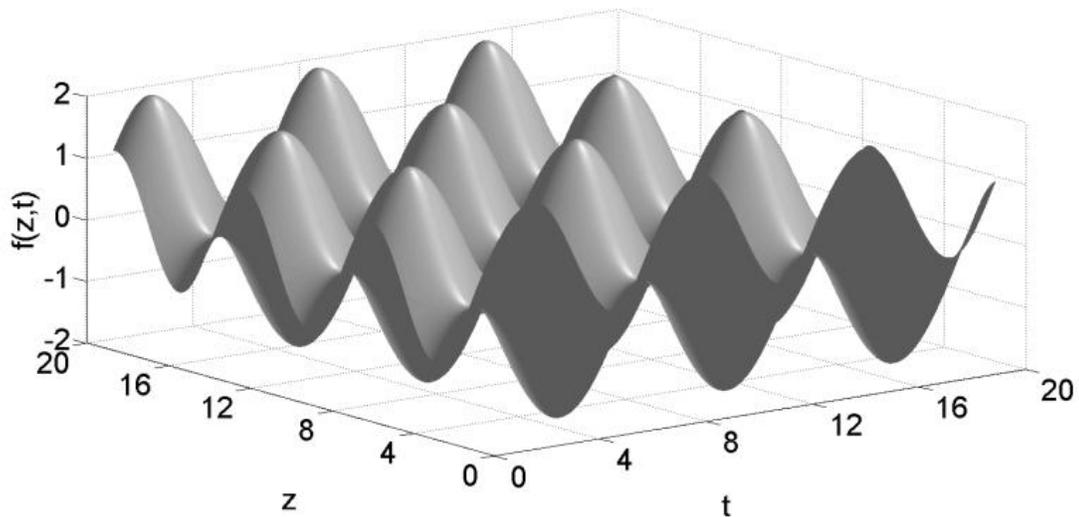


Figura 2.4. Gráfica en tres dimensiones obtenida con la aplicación sucesiva de la TNL inversa.

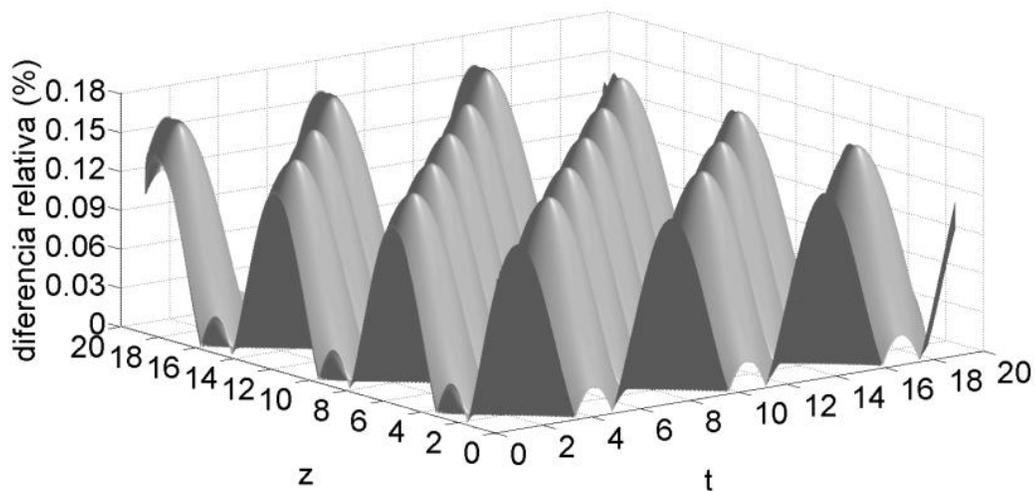


Figura 2.5. Diferencia relativa entre las definiciones numérica y analítica.

### 2.4.2 Caso B

Para este caso se considera la expresión:

$$f(z, t) = \gamma_1 \gamma_2 (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) (e^{-\beta_1 z} - e^{-\beta_2 z}) \quad (2.30)$$

donde  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2.014$ ,  $\alpha_1 = \beta_1 = 0.287$  y  $\alpha_2 = \beta_2 = 1.250$ , estos valores corresponden a una función tipo doble exponencial tanto en  $z$  como en  $t$ .

La definición de (2.30) en el dominio  $q$ - $s$  es:

$$F(q, s) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\alpha_2 - \alpha_1) (\beta_2 - \beta_1)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(q + \beta_1)(q + \beta_2)} \quad (2.31)$$

La gráfica en tres dimensiones obtenida al aplicar de manera sucesiva la TNL inversa a (2.31) se muestra en la Figura 2.6. La comparación entre los resultados numérico y analítico por medio del cálculo de la diferencia relativa se muestra en la Figura 2.7. Se puede observar que la diferencia se encuentra por debajo del 0.03% para toda la gráfica.

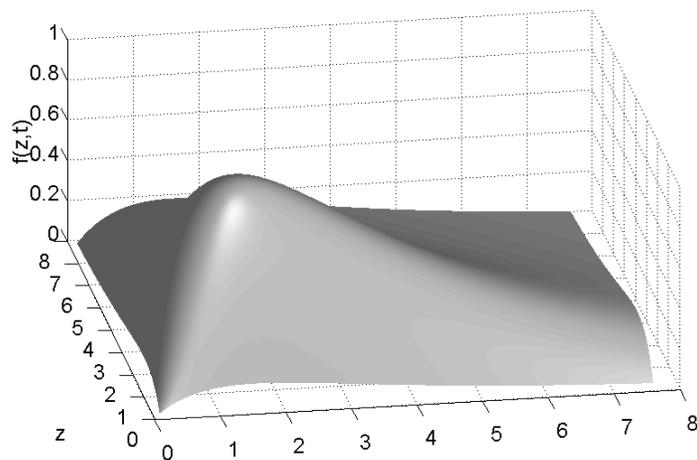


Figura 2.6. Gráfica en tres dimensiones obtenida con la aplicación sucesiva de la TNL inversa.

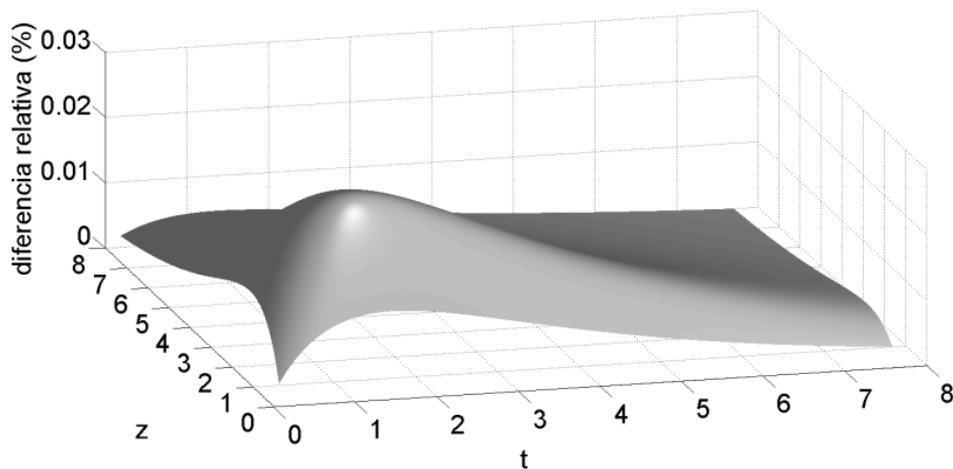


Figura 2.7. Diferencia relativa entre las definiciones numérica y analítica.

Los resultados obtenidos con estas validaciones dan buenos indicios de la factibilidad de la aplicación sucesiva de la TNL en el estudio de transitorios electromagnéticos.

## Capítulo 3 Modelado de Líneas de Transmisión en el Dominio $q$ - $s$

### 3.1 Introducción

Las líneas de transmisión son elementos críticos en los sistemas eléctricos actuales, ya que son utilizadas extensivamente en estos sistemas y conforman una gran parte de los mismos. Es por esto que es de gran importancia el análisis de las sobretensiones transitorias que se pueden presentar en las líneas debido a fenómenos como el impacto de una descarga atmosférica o la operación de un interruptor.

Las Ecuaciones del Telegrafista definen la propagación de las ondas de tensión y corriente a lo largo de las líneas de transmisión. Cuando se encuentran definidas en el dominio  $z$ - $t$  para un caso de  $n$  conductores, consisten en un conjunto de  $2n$  ecuaciones que contienen derivadas parciales de primer orden. Si se toma en cuenta la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea, aparecen convoluciones, y las ecuaciones resultantes son conocidas como ecuaciones de Radulet [45]. Sin embargo, si se aplica la transformada de Laplace, el problema se reduce a derivadas ordinarias de primer orden (sin convoluciones) en el dominio  $z$ - $s$ . Al aplicar una segunda vez la transformada de Laplace a las Ecuaciones del Telegrafista (ahora respecto al espacio), éstas se convierten en ecuaciones algebraicas en el dominio  $q$ - $s$ , las cuales pueden resolverse de manera sencilla para obtener los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea de transmisión. Posteriormente se aplica la transformada numérica de Laplace inversa, dando como resultado los perfiles de tensión y corriente de la línea en el dominio del tiempo. Adicionalmente, dado que los parámetros de la línea se encuentran definidos en el dominio de la frecuencia, la dependencia de la frecuencia de estos parámetros se puede incluir de manera sencilla.

### 3.2 Cálculo de Perfiles de Tensión y Corriente a lo Largo de la Línea

#### 3.2.1 Solución de las Ecuaciones del Telegrafista en el Dominio $q$ - $s$

Las Ecuaciones del Telegrafista para una línea de transmisión multiconductora uniforme se encuentran definidas en el dominio de la frecuencia de forma matricial como sigue:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z, s) \\ \mathbf{I}(z, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z, s) \\ \mathbf{I}(z, s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{V}(z, s)$  e  $\mathbf{I}(z, s)$  son los vectores de tensiones y corrientes a lo largo del eje de propagación  $z$  en el dominio de la frecuencia;  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Y}$  son las matrices de impedancia serie y admitancia en derivación de la línea, por unidad de longitud. Aplicando la transformada de Laplace con respecto a la coordenada  $z$ , se tiene:

$$\begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{I}_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{V}_0(s)$  e  $\mathbf{I}_0(s)$  son la tensión y la corriente al inicio de la línea, respectivamente, y  $\mathbf{U}$  es una matriz identidad de dimensiones  $n \times n$ . Se puede observar que en (3.2) las derivadas se han transformado a operaciones algebraicas y las Ecuaciones del Telegrafista se encuentran en una forma algebraica sencilla de resolver en el dominio  $q$ - $s$ . Resolviendo (3.2) para  $[\mathbf{V}(q, s) \ \mathbf{I}(q, s)]^T$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & q\mathbf{U} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{I}_0(s) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) es la solución para las tensiones y corrientes a lo largo de la línea en el dominio  $q$ - $s$ , la cual se encuentra en función de  $\mathbf{V}_0(s)$  e  $\mathbf{I}_0(s)$ , que son las tensiones y corrientes al principio de la línea, con lo que ahora el problema se reduce a calcular estos valores.

### 3.2.2 Cálculo de Tensiones y Corrientes al Inicio de la Línea

#### 3.2.2.1 Tensiones al Inicio de la Línea

El cálculo de las tensiones al inicio de la línea puede realizarse a partir de la matriz de admitancia de la línea (modelo de 2 puertos) en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{S0}(s) \\ \mathbf{I}_{SL}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{Y}_S & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{Y}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{V}_L(s) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_0 \coth(\Psi L) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\Psi L) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Y}_0 = \sqrt{\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}} \quad (3.7)$$

$$\Psi = \sqrt{\mathbf{Z}\mathbf{Y}} \quad (3.8)$$

$\mathbf{I}_{S0}(s)$  e  $\mathbf{I}_{SL}(s)$  corresponden a las fuentes de corriente conectadas en los extremos de la línea;  $\mathbf{V}_0(s)$  y  $\mathbf{V}_L(s)$  corresponden a las tensiones medidas en los extremos de la línea,  $\mathbf{Y}_s$  y  $\mathbf{Y}_L$  corresponden a las admitancias conectadas al inicio y final de la línea. Si se excita a la línea por medio de un equivalente de Norton conectado en  $z = 0$ , se tiene que:

$$\mathbf{I}_{S0}(s) = \mathbf{Y}_s \mathbf{V}_s \quad (3.9)$$

$$\mathbf{I}_{SL}(s) = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Substituyendo (3.9) y (3.10) en (3.4), y resolviendo para  $\mathbf{V}_0$ , se tiene:

$$\mathbf{V}_0(s) = \boldsymbol{\beta} \mathbf{V}_s \quad (3.11)$$

donde:

$$\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{Y}_s) - (\mathbf{A} + \mathbf{Y}_L)^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y}_s \quad (3.12)$$

### 3.2.2.2 Corrientes al Inicio de la Línea

El cálculo de las corrientes al inicio de la línea puede realizarse de dos maneras: una es a partir de la representación de dos puertos de la línea y la otra es utilizando el circuito  $\pi$  equivalente.

Si se parte de la representación de dos puertos de la línea, se considera que la corriente inyectada por la fuente  $\mathbf{I}_{S0}(s)$  se divide en dos partes, como se muestra en la Figura 3.1; una circula a través de  $\mathbf{Y}_s$  (con valor  $\mathbf{Y}_s \mathbf{V}_0(s)$ ) y la otra corresponde a  $\mathbf{I}_0(s)$ . Resolviendo para  $\mathbf{I}_0(s)$  y aplicando (3.9) y (3.11) se tiene:

$$\mathbf{I}_0(s) = \mathbf{Y}_s(\mathbf{U} - \boldsymbol{\beta})\mathbf{V}_s \quad (3.13)$$

Utilizando el circuito  $\pi$  equivalente de la línea,  $\mathbf{I}_0(s)$  puede calcularse como la suma de dos corrientes, como se muestra en la Figura 3.2. En este caso  $\mathbf{I}_0(s)$  se encuentra en función de las tensiones en los extremos de la línea y se define como:

$$\mathbf{I}_0(s) = \mathbf{A}\mathbf{V}_0(s) - \mathbf{B}\mathbf{V}_L(s) \quad (3.14)$$

A través de manipulaciones algebraicas, es posible demostrar que (3.13) y (3.14) son ecuaciones equivalentes.

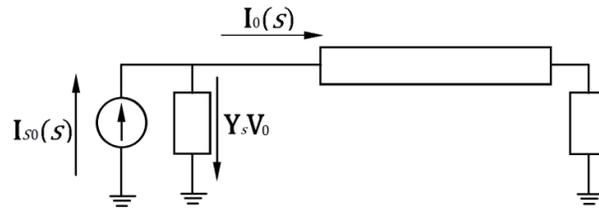


Figura 3.1. Circuito utilizado para el cálculo de  $I_0(s)$ .

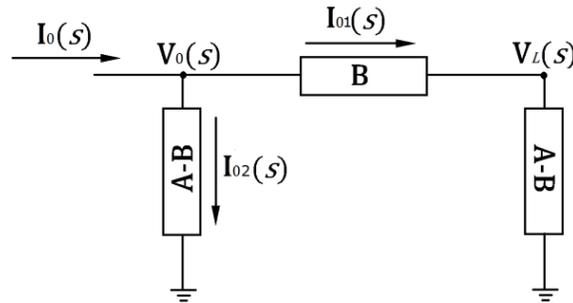


Figura 3.2. Cálculo de  $I_0(s)$  a partir del circuito  $\pi$  equivalente de la línea.

Por medio de la aplicación sucesiva del algoritmo de la transformada numérica de Laplace inversa, como se describe en el Capítulo 2, (3.3) puede llevarse al dominio  $z-t$  para obtener  $\mathbf{v}(z,t)$  e  $\mathbf{i}(z,t)$ , que son los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea multiconductora. Se puede observar que, dado que  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Y}$  están definidos en el dominio de la frecuencia, la ecuación (3.3) puede incorporar parámetros dependientes de la frecuencia de una manera sencilla.

### 3.3 Aplicaciones

Además de la aplicación a líneas de transmisión aéreas, la técnica presentada al inicio del capítulo también puede ser implementada para el análisis transitorio de otros elementos, tales como devanados de transformadores y redes de transmisión. En esta sección se describe la manera en que se puede aplicar el método desarrollado para obtener los perfiles de tensión y corriente de los elementos mencionados.

#### 3.3.1 Aplicación a Devanados de Transformadores

Un devanado puede ser modelado como una línea de transmisión, ya sea monofásica o multiconductora. En el modelo de línea monofásica, se puede considerar que la línea es una representación del devanado extendido, lo cual no permite que se tomen en cuenta las inductancias entre vueltas, las cuales son importantes al estudiar las tensiones transitorias en los transformadores.

Este problema se puede resolver con el uso de un modelo de línea de multiconductora, donde cada conductor representa una sección del devanado (disco o vuelta) [2], y de esta manera se pueden tomar en cuenta las inductancias entre vueltas del devanado. En este modelo es necesario establecer la continuidad entre secciones del devanado, lo cual se logra aplicando una conexión tipo zig-zag, en la cual una admitancia alta  $Y_{con}$  conecta el final de un conductor con el inicio del siguiente, como se ve en la Figura 3.3.

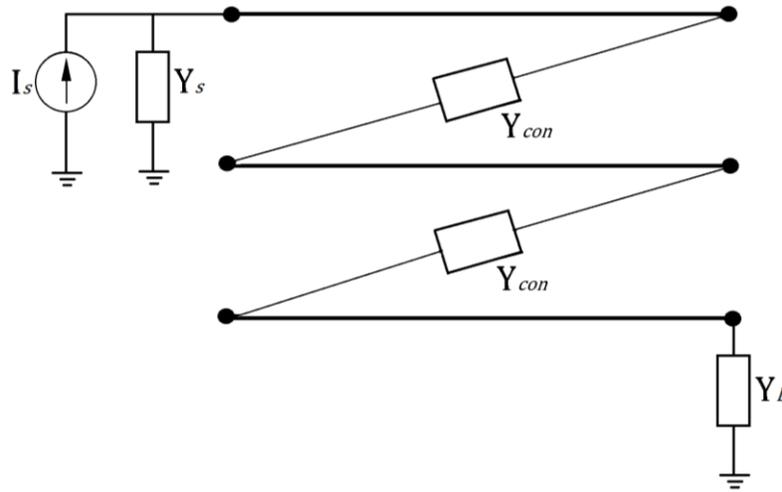


Figura 3.3. Conexión en zig-zag de un modelo de línea multiconductora para un devanado de tres vueltas.

Esta conexión entre vueltas se implementa en la matriz nodal de la línea en el dominio de la frecuencia. La representación de dos puertos se define como:

$$\begin{bmatrix} I_{S0}(s) \\ I_{SL}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{Y}_{con11} & -(\mathbf{B} + \mathbf{Y}_{con12}) \\ -(\mathbf{B} + \mathbf{Y}_{con21}) & \mathbf{A} + \mathbf{Y}_{con22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{V}_L(s) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde:

$$\mathbf{Y}_{con11} = \begin{bmatrix} Y_s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Y_{con} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{con} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_{con} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{Y}_{con12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Y_{con} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Y_{con} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{con} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{Y}_{con21} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{con} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_{con} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Y_{con} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Y}_{con22} = \begin{bmatrix} Y_{con} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Y_{con} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_{con} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Y_L \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$\mathbf{V}_0(s)$  y  $\mathbf{V}_L(s)$  pueden calcularse al resolver (3.15), mientras que  $\mathbf{I}_0(s)$  se calcula a partir de (3.14). Las soluciones para las tensiones y corrientes en el dominio  $q$ -s se obtienen a partir de (3.3). Finalmente, aplicando (2.9) y (2.19) se pueden obtener los perfiles de tensión y corriente,  $\mathbf{v}(z,t)$  e  $\mathbf{i}(z,t)$ , a lo largo de cada vuelta.

### 3.3.2 Aplicación a Redes de Transmisión

El método descrito en la sección 3.2 puede expandirse y aplicarse al análisis de transitorios en redes de transmisión. Para esto, es necesario calcular las tensiones y corrientes al inicio de cada línea que forma parte de la red.

Las tensiones en cada nodo de la red se pueden calcular a partir de la matriz nodal de la red en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{bus}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{S1}(s) \\ \mathbf{I}_{S2}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{S4}(s) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{Y}_{bus}$  es la matriz de admitancias de la red e  $\mathbf{I}_{Si}(s)$  representa la corriente inyectada en el  $i$ -ésimo nodo de la red. Una vez que las tensiones se han calculado, las corrientes al inicio de las líneas pueden obtenerse aplicando (3.14) a cada línea de la red. Posteriormente, es posible obtener las tensiones y corrientes de cada línea en el dominio  $q$ -s:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(q,s) \\ \mathbf{V}_2(q,s) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n(q,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{l1}(s) \\ \mathbf{V}_{l2}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{ln}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l1}(s) \\ \mathbf{I}_{l2}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{ln}(s) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(q, s) \\ \mathbf{I}_2(q, s) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n(q, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{l1}(s) \\ \mathbf{V}_{l2}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{ln}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{22}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l1}(s) \\ \mathbf{I}_{l2}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{ln}(s) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde

$$\mathbf{D}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^{(i)} & \mathbf{D}_{12}^{(i)} \\ \mathbf{D}_{21}^{(i)} & \mathbf{D}_{22}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{Y}_i & q\mathbf{U} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.23)$$

$\mathbf{V}_{li}(s)$  e  $\mathbf{I}_{li}(s)$  corresponden a la tensión y corriente al inicio de la línea,  $\mathbf{Z}_i$  y  $\mathbf{Y}_i$  son las matrices de impedancia serie y admitancia en derivación de la línea, respectivamente. El término  $i$  se refiere a la  $i$ -ésima línea de la red de transmisión.

Finalmente, aplicando (2.9) y (2.19) a cada línea, se pueden obtener los perfiles de tensión y corriente en el dominio del tiempo.

### 3.3.3 Descargas Atmosféricas Directas

El estudio de descargas atmosféricas directas sobre la línea se puede considerar como un caso particular del análisis de una red de transmisión.

En este caso, la línea se modela como un sistema de dos líneas conectadas en serie, y la descarga atmosférica se representa como una fuente en el punto de conexión entre las dos líneas. Debido a esto, para la implementación de una descarga atmosférica directa se utilizan las mismas ecuaciones que una red de transmisión, pero considerando solamente una red de dos líneas conectadas en serie.

## 3.4 Casos de Prueba

En esta sección se aplica el método descrito en este capítulo para analizar el comportamiento de las tensiones y corrientes transitorias en cuatro casos diferentes. Estos casos incluyen una línea de transmisión aérea trifásica, un arreglo trifásico de cables subterráneos, un devanado de transformador y una red de transmisión. Por simplicidad, en todos los casos se tomó un número de muestras de 1024 ( $2^{10}$ ) tanto para el tiempo como para la distancia. Sin embargo,

esto no es un requerimiento del método; el número de muestras en tiempo y en distancia pueden ser diferentes, siempre y cuando se cumpla con el criterio de Courant-Friedrichs-Lewy [44].

### 3.4.1 Línea de Transmisión Aérea Multiconductora

Para este caso se consideró una línea aérea trifásica con las características que se presentan en la Tabla 3.1, la Figura 3.4 muestra la vista transversal del arreglo de la línea. Se tiene una tensión de excitación en la fase A con forma de onda tipo doble exponencial (1 p.u.  $1.2 \mu\text{s} / 50 \mu\text{s}$ ), dejando los otros conductores en circuito abierto en sus dos extremos. El tiempo de observación considerado es de  $50 \mu\text{s}$ .

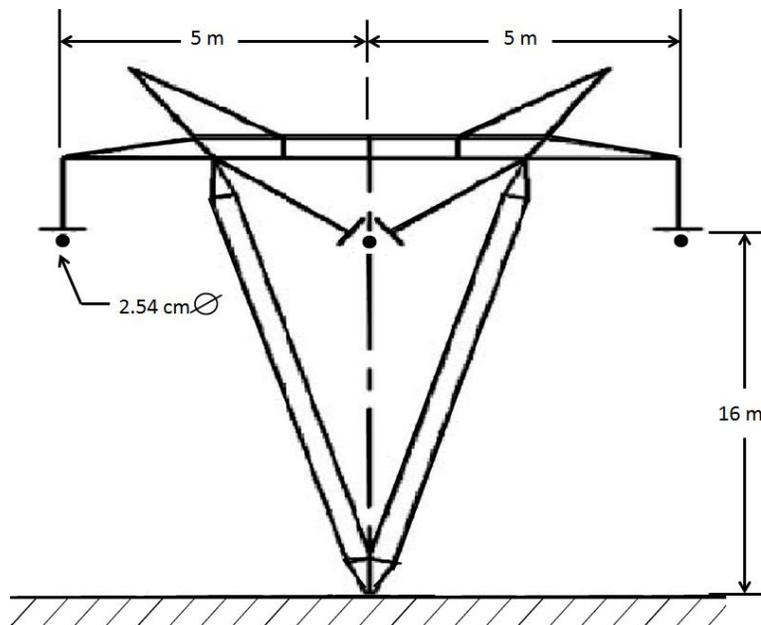


Figura 3.4. Vista transversal de la línea de transmisión considerada.

La dependencia de la frecuencia de la impedancia serie de la línea (debida al efecto piel en el terreno y en el conductor) se toma en cuenta por medio del concepto de profundidad de penetración compleja [46].

Las distribuciones de tensión y corriente a lo largo de la línea se obtienen por medio de la aplicación sucesiva de la TNL inversa a (3.3). En las Figuras 3.5 a 3.7 se muestran los perfiles de tensión a lo largo de los conductores de la línea.

La atenuación y distorsión mostradas en las respuestas obtenidas se deben a la inclusión de parámetros serie dependientes de la frecuencia. Se observa también que se alcanza una magnitud de tensión de 2 p.u., lo cual corresponde al caso de una línea abierta en su extremo receptor. También se puede observar con facilidad el acoplamiento que existe entre fases; a pesar de que solamente se

excita la fase A, las otras dos también presentan elevación de sus niveles de tensión.

Tabla 3.1. Características de la línea

Longitud de la línea	1000 m
Altura de la línea	16 m
Radio del conductor	2.54 cm
Separación horizontal entre conductores adyacentes	5 m
Resistividad del conductor	$3.21 \times 10^{-8} \Omega/m$
Resistividad del terreno	100 $\Omega/m$

Con propósitos de validación, se realizó una simulación en el software ATP/EMTP. Para ello, se utilizó el modelo dependiente de la frecuencia desarrollado por J. Martí [9], el cual se encuentra en el módulo de Line/Cable Constants (LCC). En esta simulación, la línea se dividió en 32 segmentos para poder tener acceso a mediciones en puntos internos de la línea, como se muestra en la Figura 3.8.

Con propósitos ilustrativos, solo se muestran cuatro puntos de medición de la comparación realizada entre la TNL inversa y ATP/EMTP (cada 256 muestras en la coordenada z para la TNL inversa y cada 8 segmentos para los resultados de ATP/EMTP); de la Figura 3.9 a la Figura 3.11 se pueden observar estas comparaciones. Sin embargo, se puede observar que existen diferencias entre los resultados obtenidos con ATP/EMTP y la TNL inversa, lo cual es más evidente para las fases B y C; estas diferencias se hacen más prominentes conforme aumenta el tiempo. Las gráficas de comportamiento transitorio presentadas en esta sección y en el resto de este trabajo presentan la magnitud de tensión en medidas por unidad (p.u.) referidas a la fuente de alimentación.

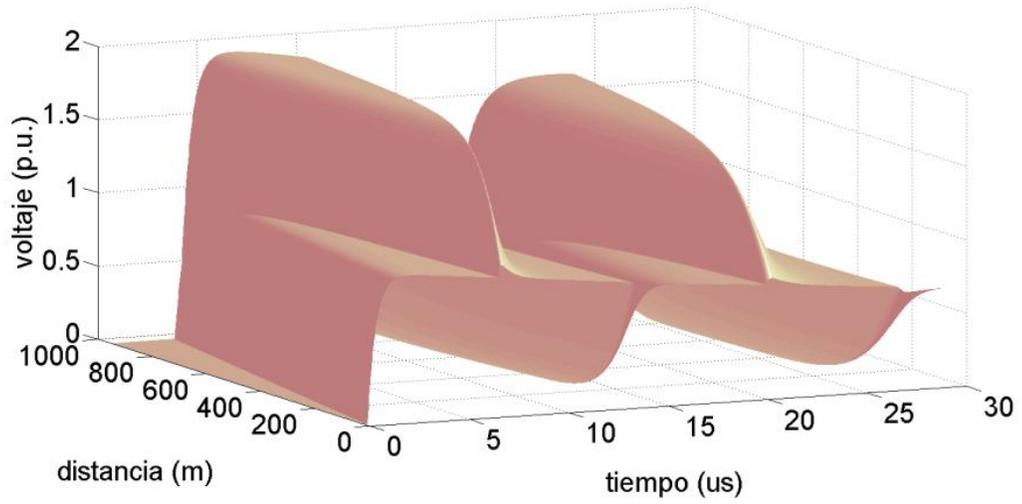


Figura 3.5. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase A.

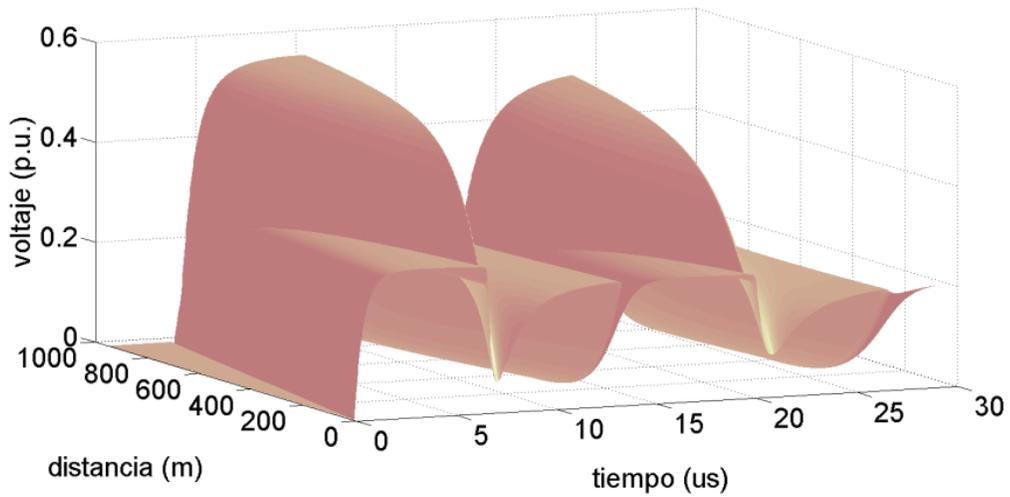


Figura 3.6. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase B.

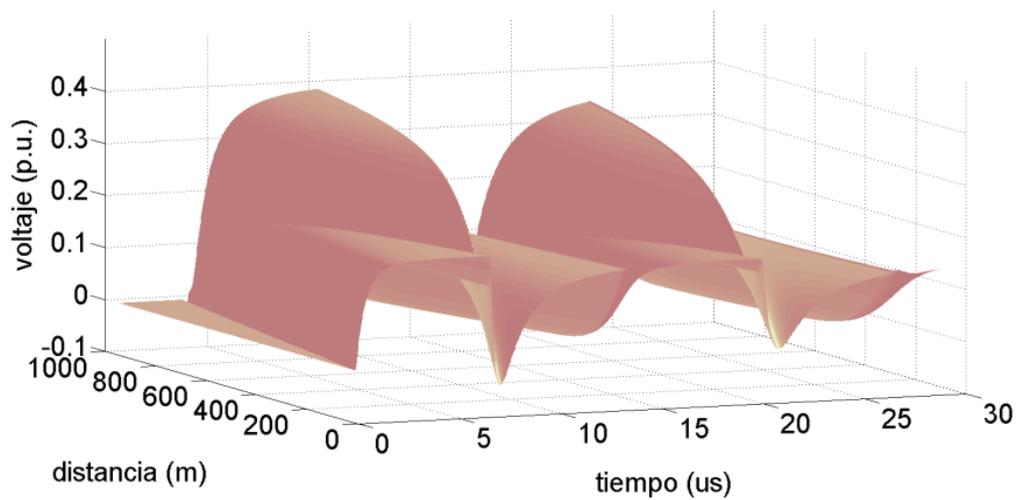


Figura 3.7. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase C.

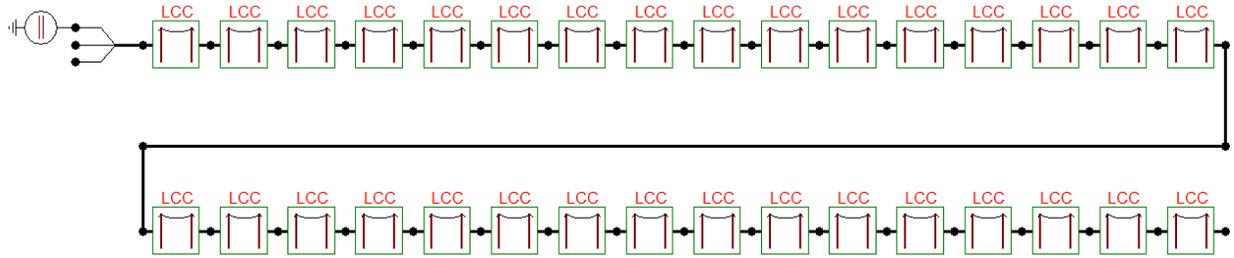


Figura 3.8. Simulación realizada en ATP/EMTP.

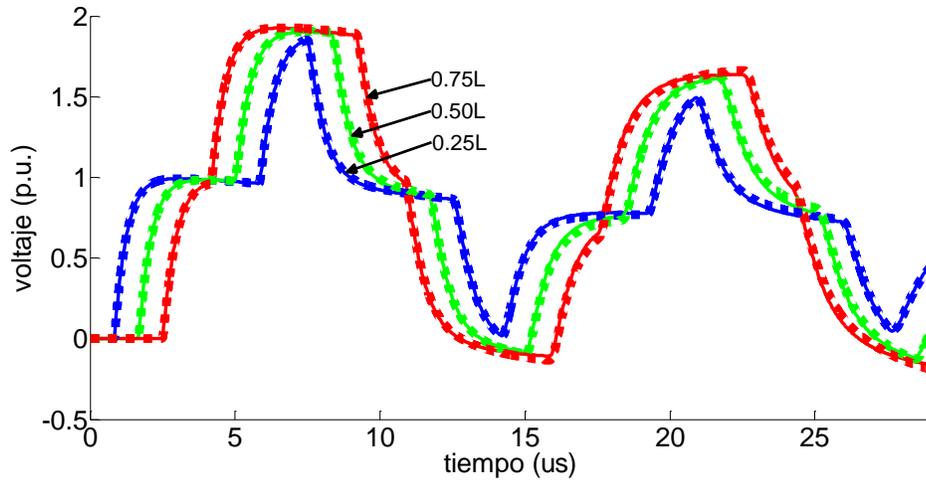


Figura 3.9. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase A. La línea está dividida en 32 segmentos en ATP/EMTP.

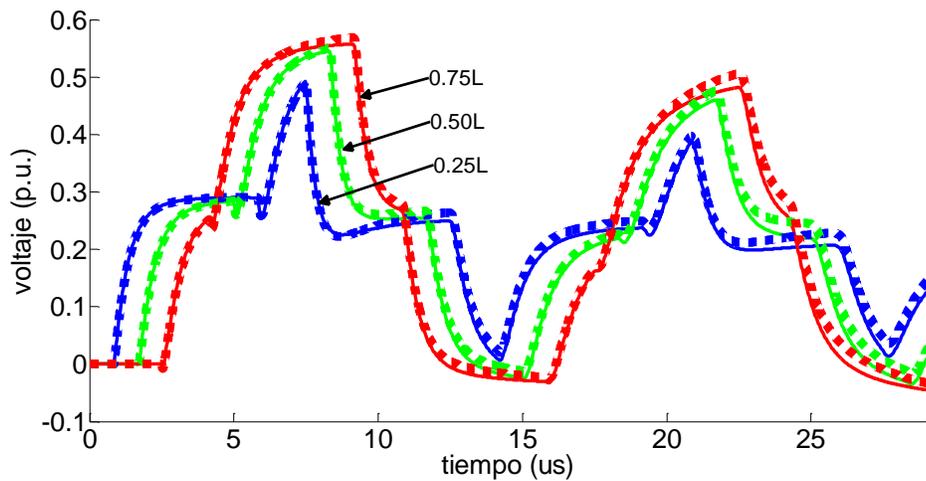


Figura 3.10. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase B. La línea está dividida en 32 segmentos en ATP/EMTP.

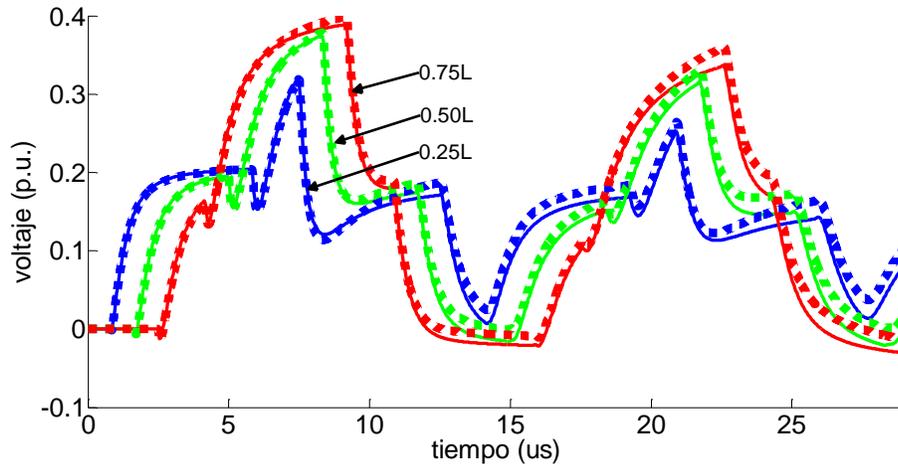


Figura 3.11. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase C. La línea está dividida en 32 segmentos en ATP/EMTP.

Se realizaron simulaciones adicionales en ATP/EMTP utilizando un mayor muestreo en el tiempo, pero los resultados no tuvieron mucha variación, es decir, la diferencia entre los resultados no se debe al muestreo en tiempo. Adicionalmente, se realizaron simulaciones utilizando un enfoque diferente que consistió en disminuir el número de segmentos en los que se divide la línea en ATP/EMTP. Para una línea dividida en 8 segmentos se obtuvieron resultados más similares a los de la TNL inversa, y para una línea dividida en 4 segmentos los resultados son bastante cercanos, como se muestra en las Figuras 3.12 a 3.14.

Los problemas presentados por ATP/EMTP al discretizar la línea en varios segmentos se atribuyen a la acumulación de errores en la aproximación utilizada por el modelo de J. Marti para incluir la dependencia frecuencial de los parámetros de la línea. En este modelo la impedancia característica y la función de propagación de la línea, dependientes de la frecuencia, se sintetizan utilizando funciones racionales cuyos polos y ceros se obtienen por medio del método de Bode. Los errores obtenidos por esta aproximación racional se acumulan conforme la onda viaja a través de diferentes segmentos de línea. Problemas similares se reportan en [47] al calcular sobretensiones internas con el software EMTP-RV al conectar en cascada segmentos de línea representados por un medio de un modelo de línea universal.

El método presentado en esta tesis no tiene este tipo de problemas, ya que la dependencia frecuencial de los parámetros de la línea se incluye de manera directa, sin la necesidad de emplear aproximaciones numéricas.

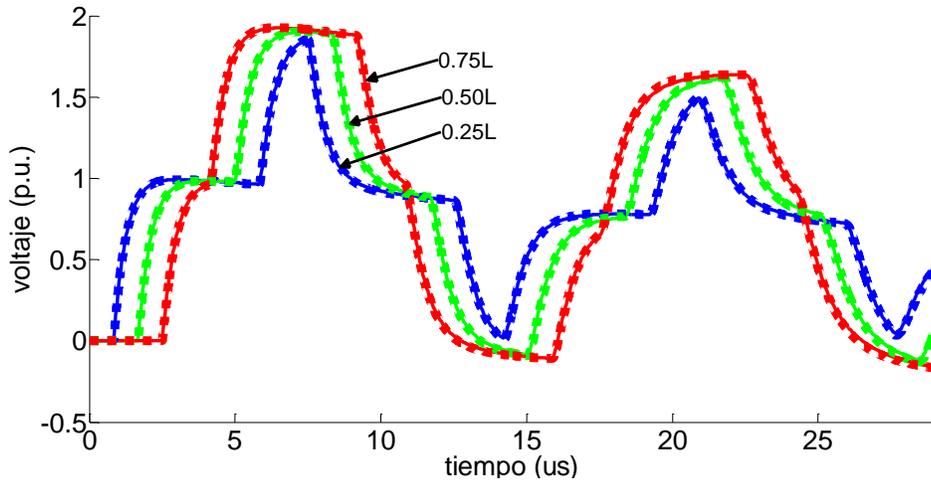


Figura 3.12. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase A. La línea está dividida en 4 segmentos en ATP/EMTP.

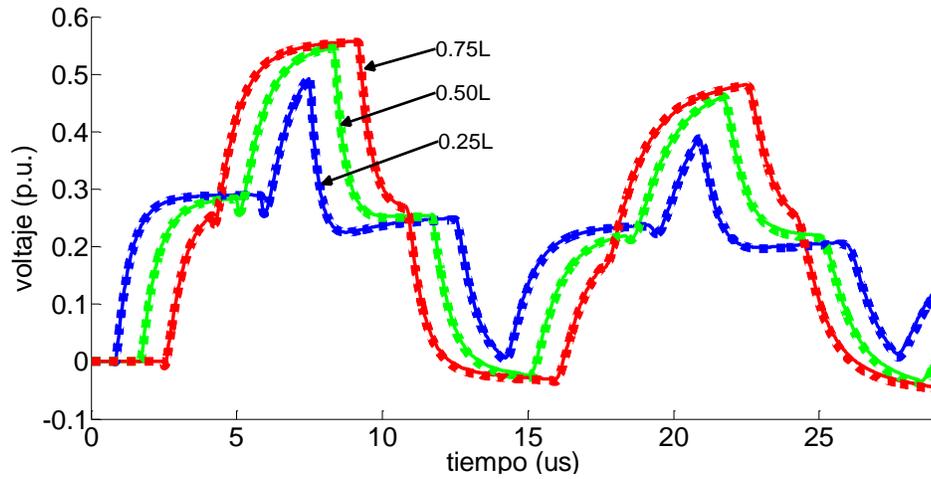


Figura 3.13. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase B. La línea está dividida en 4 segmentos en ATP/EMTP.

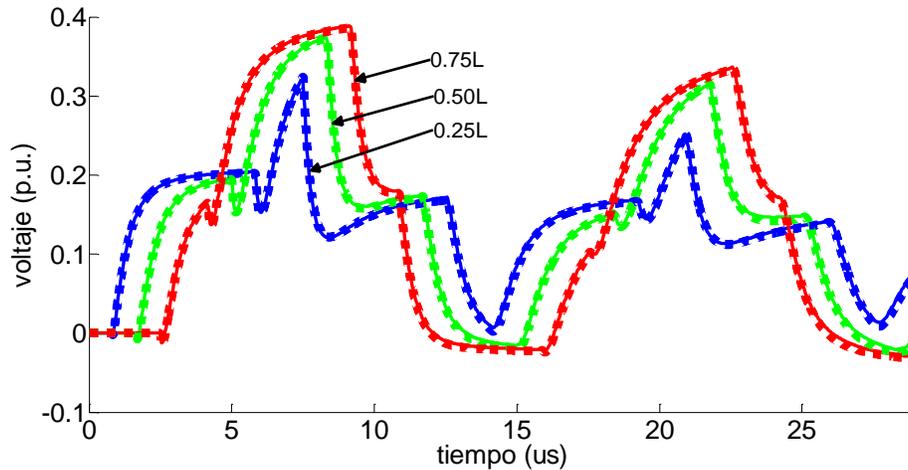


Figura 3.14. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase C. La línea está dividida en 4 segmentos en ATP/EMTP.

### 3.4.2 Devanado de un Transformador

Para este caso se consideró un devanado de dos discos de 26 vueltas (13 vueltas por disco), con la configuración que se presenta en la Figura 3.15, donde cada vuelta tiene 1.5635 m de longitud.

De la Figura 3.15.  $C_{FS}$  es la capacitancia entre una vuelta y tierra,  $C_{LV}$  es la capacitancia entre los devanados de alta y baja tensión,  $C_{IT}$  es la capacitancia entre vueltas,  $C_{ID}$  es la capacitancia entre discos adyacentes,  $C_a$  es la capacitancia entre vueltas separadas por una vuelta, y  $C_b$  es la capacitancia entre vueltas separadas por dos vueltas.

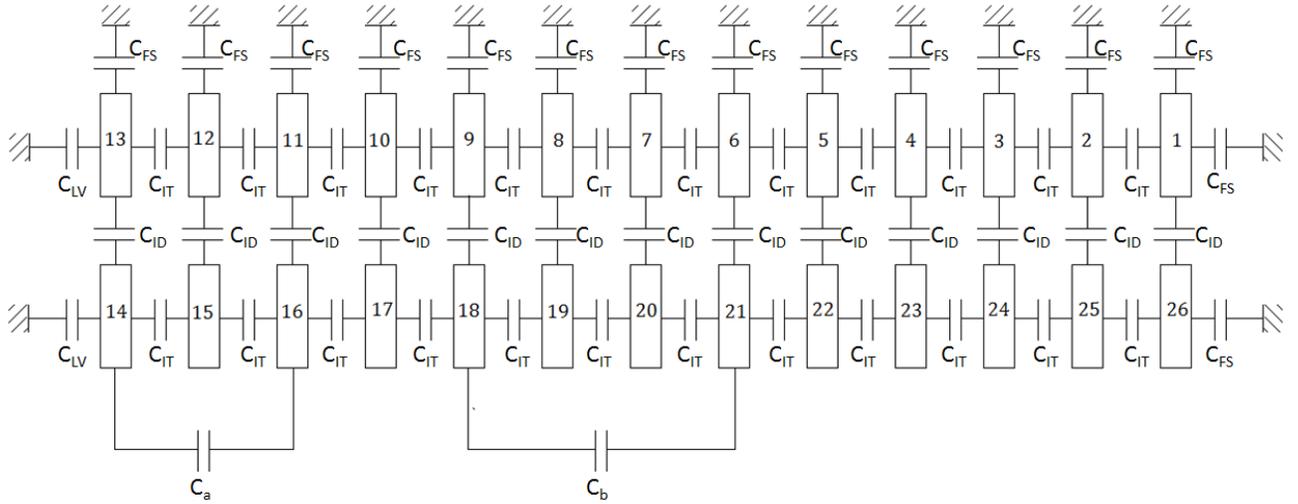


Figura 3.15. Esquemático del devanado utilizado en el caso de prueba [48]

La matriz de capacitancias se calcula como sigue [48]:

$$C_{1,1} = 2C_{FS} + C_a + C_b + C_D + C_{IT} \quad (3.24)$$

$$C_{2,2} = C_{12,12} = C_{15,15} = C_{25,25} = C_{FS} + C_a + C_b + C_{ID} + 2C_{IT} \quad (3.25)$$

$$C_{3,3} = C_{11,11} = C_{16,16} = C_{24,24} = C_{2,2} - C_b \quad (3.26)$$

$$C_{4,4} = C_{5,5} = \dots = C_{10,10} = C_{FS} + 2C_a + 2C_b + C_{ID} + 2C_{IT} \quad (3.27)$$

$$C_{1,2} = C_{2,3} = \dots = C_{25,26} = C_{IT} \quad (3.28)$$

$$C_{1,3} = C_{2,4} = \dots = C_{24,26} = C_a \quad (3.29)$$

$$C_{1,4} = C_{2,5} = \dots = C_{10,13} = C_b \quad (3.30)$$

$$C_{1,26} = C_{2,25} = C_{26,1} = C_{ID} \quad (3.31)$$

$$C_{12,14} = C_{11,14} = C_{13,15} = C_{13,16} = 0 \quad (3.32)$$

$$C_{26,26} = C_{FS} + C_a + C_b + C_{ID} + C_{IT} \quad (3.33)$$

Los parámetros de este devanado se obtuvieron de [48] y se presentan a continuación:

- $C_{ID} = 4.7928$  pF/m.
- $C_{FS} = 20.943$  pF/m.
- $C_{IT} = 568.68$  pF/m.
- $C_{LV} = 4.3690$  pF/m.
- $C_a = 284.34$  pF/m.
- $C_b = 189.56$  pF/m.
- Matriz de resistencias  $\mathbf{R} = 0.3094\mathbf{U}$  ohm/m.
- Matriz de inductancia del conductor  $\mathbf{L}_{con} = 707.07\mathbf{U}$  pH/m.
- Matriz de inductancia geométrica  $\mathbf{L}_0 = 2.1697 \times 10^{-17} \mathbf{C}^{-1}$  H/m.
- Matriz de conductancia  $\mathbf{G} = 6.4683 \times 10^5 \mathbf{C}$  S/m.

Se conectó una fuente ideal tipo escalón unitario al inicio de la primera vuelta, y el final de la última vuelta se dejó en circuito abierto. El tiempo de observación es de 0.2  $\mu$ s.

Los perfiles de tensión a lo largo de cada vuelta se calcularon aplicando la TNL inversa y el método descrito en la sección 3.3.1. Las Figuras 3.16 a la 3.18 muestran los perfiles de tensión obtenidos en tres diferentes vueltas del devanado.

Adicionalmente, con motivos de validación se realizó una simulación utilizando un modelo de dos puertos en el dominio de la frecuencia. En esta simulación, la línea multiconductora que representa al devanado se dividió en 4 segmentos conectados en serie con la finalidad de tener acceso a mediciones en puntos internos de las vueltas. Las Figuras 3.19 y 3.20 muestran la comparación entre los resultados obtenidos con la aplicación sucesiva de la TNL inversa y los resultados de la simulación realizada en el dominio de la frecuencia. Las comparaciones mostradas corresponden al inicio y a la mitad de la segunda, sexta y última vueltas. Se observa que en todos los casos las comparaciones tienen un comportamiento muy similar entre ambos métodos.

La comparación de las Figuras 3.19 y 3.20 muestra la existencia de diferencias en el comportamiento transitorio al inicio y a la mitad de las vueltas (particularmente en el caso de la vuelta 6). Este tipo de diferencias en el comportamiento de la tensión se espera que sea más prominente para transformadores de mayor tamaño, por lo que este tipo de análisis a lo largo de cada vuelta puede proporcionar información adicional para el diseño de

aislamiento de devanados (si la distribución de tensión cambia a lo largo de la vuelta, también cambiará el esfuerzo dieléctrico).

Este tipo de análisis también puede ser utilizado para transformadores que tienen un gran número de vueltas; en este caso, un conjunto de vueltas (un disco por ejemplo) puede ser tratado como un segmento, y el método utilizado puede proporcionar una aproximación del comportamiento transitorio dentro de cada segmento. Cabe mencionar que el núcleo magnético del transformador tiene poca influencia en este tipo de análisis, debido a que a altas frecuencias se comporta como una barrera de flujo magnético, por lo que el flujo magnético no lo penetra y la no linealidad de este no afecta la distribución de tensión a lo largo del devanado.

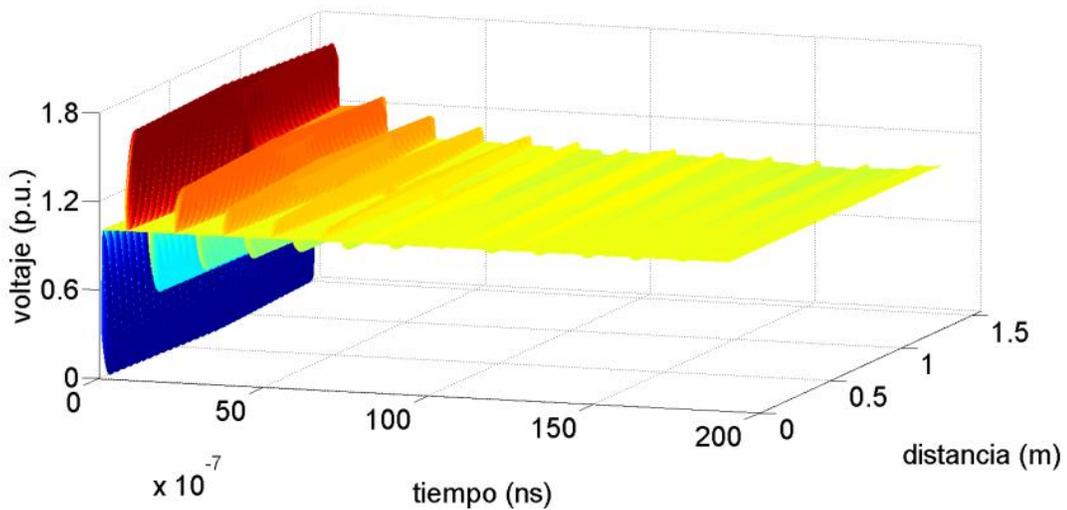


Figura 3.16. Perfil de tensión a lo largo de la primera vuelta del devanado.

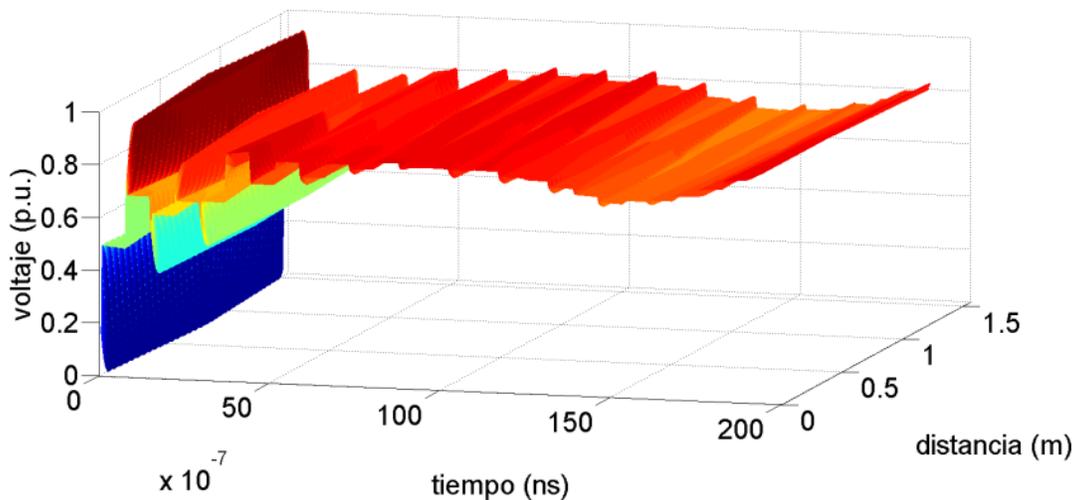


Figura 3.17. Perfil de tensión a lo largo de la sexta vuelta del devanado.

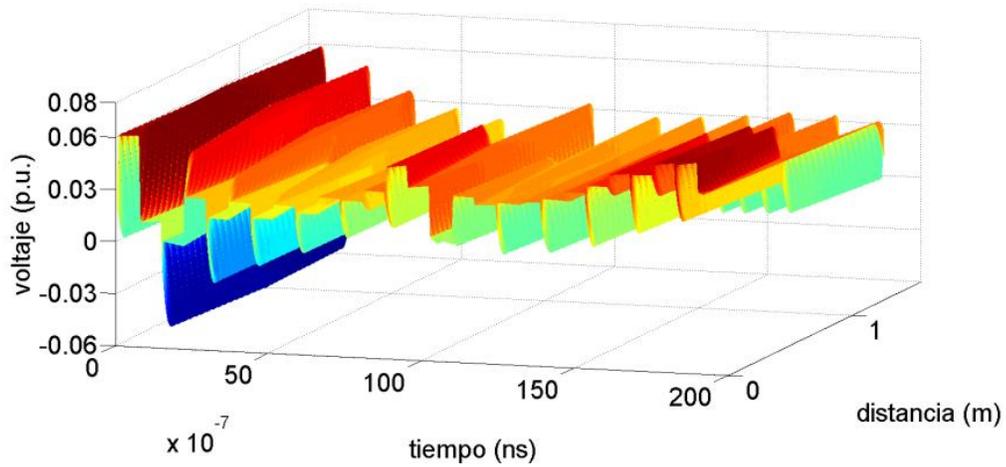


Figura 3.18. Perfil de tensión a lo largo de la última vuelta del devanado.

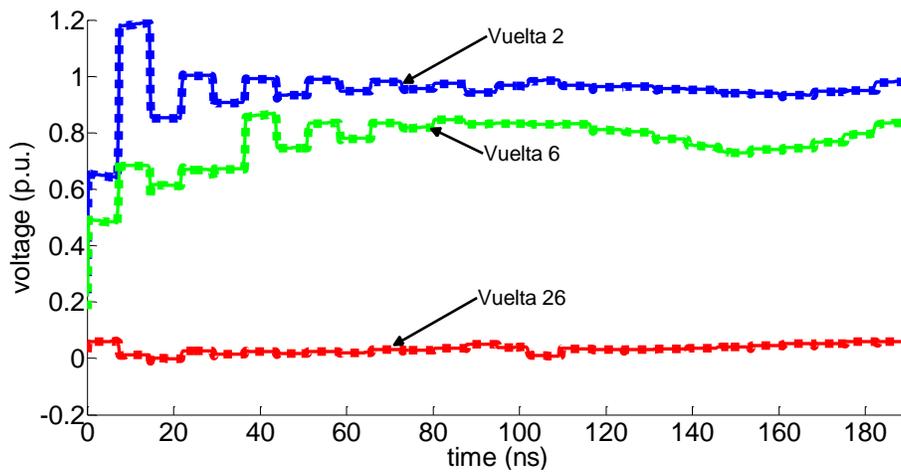


Figura 3.19. Comparación entre la aplicación sucesiva (líneas continuas) y el análisis en el dominio de la frecuencia (líneas punteadas) al inicio de las vueltas.

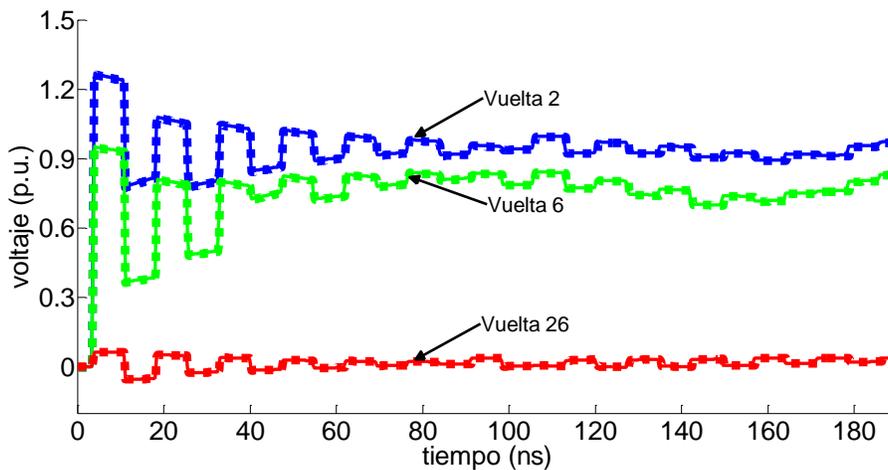


Figura 3.20. Comparación entre la aplicación sucesiva (líneas continuas) y el análisis en el dominio de la frecuencia (líneas punteadas) a la mitad de las vueltas.

### 3.4.3 Arreglo Trifásico de Cables

Para este caso se consideró un arreglo trifásico de cables subterráneos. El arreglo se encuentra enterrado a una profundidad de 0.762 m, la distancia entre fases contiguas es de 0.1524 m y la longitud de los cables es de 16,093.44 m. En la Figura 3.21 se muestra la vista adicional de este arreglo.

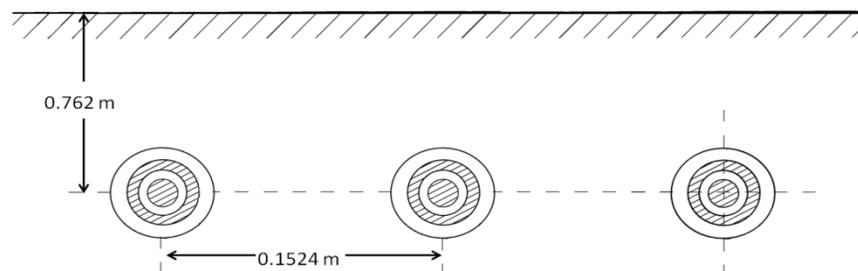


Figura 3.21. Vista transversal del arreglo utilizado.

Información adicional sobre la disposición de los cables y sus parámetros eléctricos se puede encontrar en [41].

Para la simulación, se conecta una fuente ideal tipo escalón al nodo emisor del núcleo de la fase A, mientras que su nodo receptor se deja en circuito abierto. El resto de los núcleos y blindajes (en lados emisor y receptor) se aterrizan. Se consideró un tiempo de observación de 3 ms. Las Figuras 3.22 a 3.25 muestran los perfiles de tensión a lo largo de los núcleos y blindajes de las fases.

Adicionalmente, se realizó con propósitos de validación una simulación del arreglo de cables en PSCAD/EMTDC. En las Figuras 3.26 a 3.29 se tienen las comparaciones entre los resultados obtenidos al aplicar la TNL inversa y la simulación realizada en PSCAD/EMTDC. Estas comparaciones se obtuvieron a la mitad del cable. Como se puede observar, en todas las comparaciones se obtuvieron resultados muy similares entre ambos métodos.

### 3.4.4 Red de Transmisión

Para este caso se considera la red de transmisión trifásica que se muestra en la Figura 3.30. La longitud y radio de los conductores de las líneas que forman la red se presentan en la Tabla 3.2, la posición de los conductores se presenta en la Tabla 3.3. Se tienen cargas inductivas de 0.01 y 0.05 H conectadas en cada fase de los nodos 2 y 4, respectivamente. La resistividad del terreno es de 100  $\Omega/m$  y la resistividad de los conductores es de  $3.21 \times 10^{-8}$   $\Omega/m$ . Se conecta una fuente

trifásica sinusoidal ideal en el nodo 1, y se tiene un tiempo de observación de 15 ms.

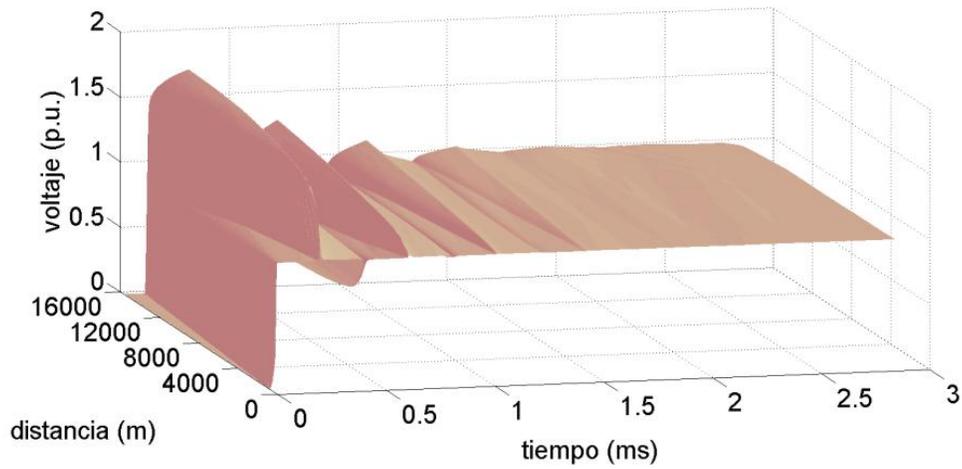


Figura 3.22. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo del conductor de la fase A.

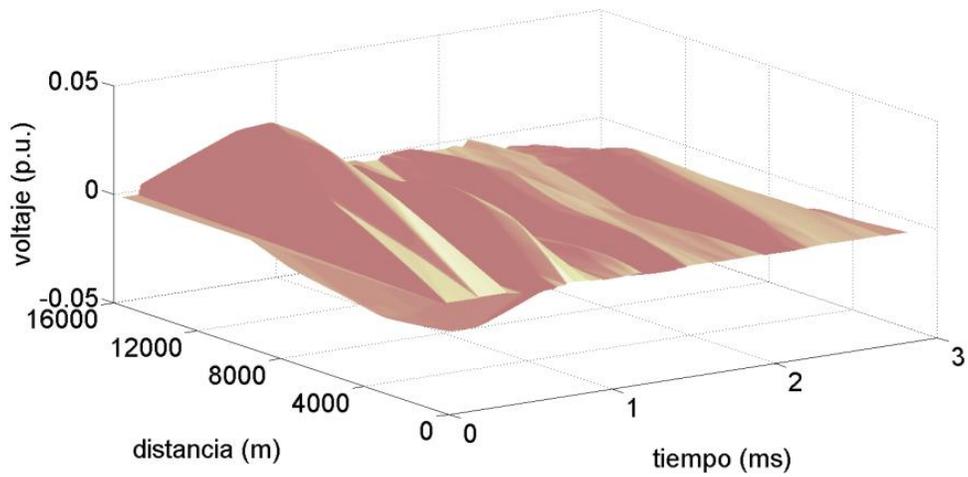


Figura 3.23. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo del blindaje de la fase A.

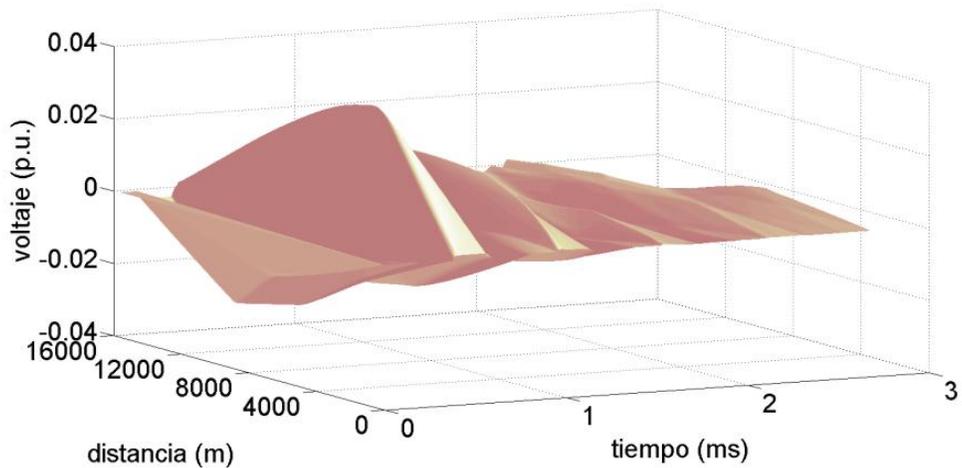


Figura 3.24. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo del blindaje de la fase B.

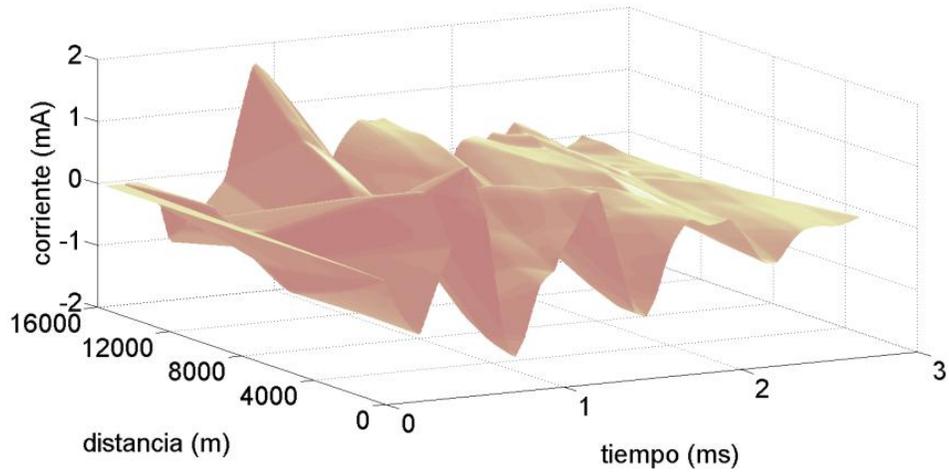


Figura 3.25. Gráfica en tres dimensiones del perfil de corriente a lo largo del conductor de la fase C.

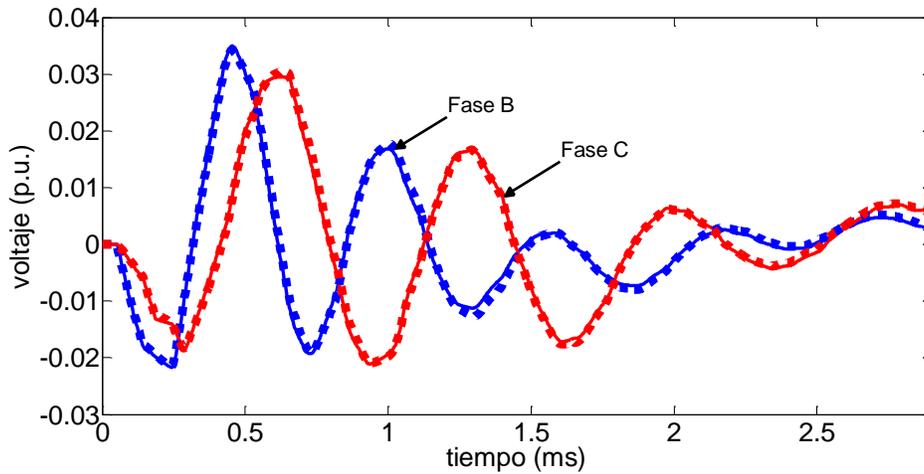


Figura 3.26. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADMTDC (líneas punteadas) para los conductores a la mitad del cable.

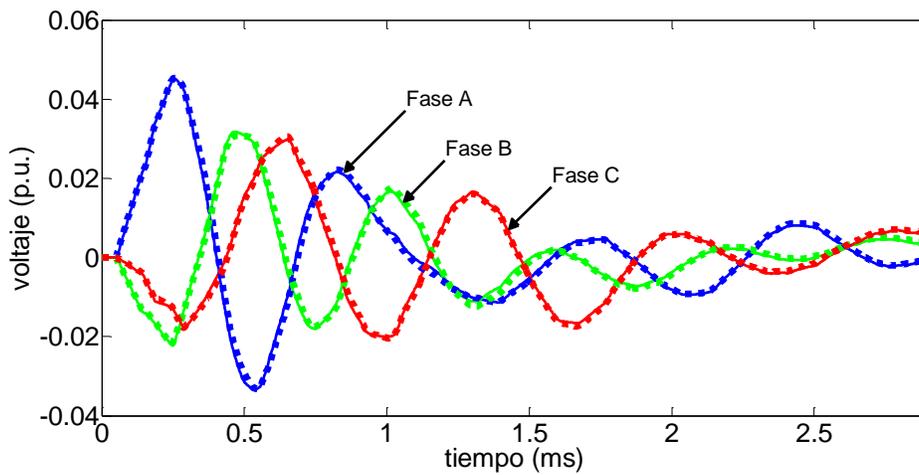


Figura 3.27. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADMTDC (líneas punteadas) para los blindajes a la mitad del cable.

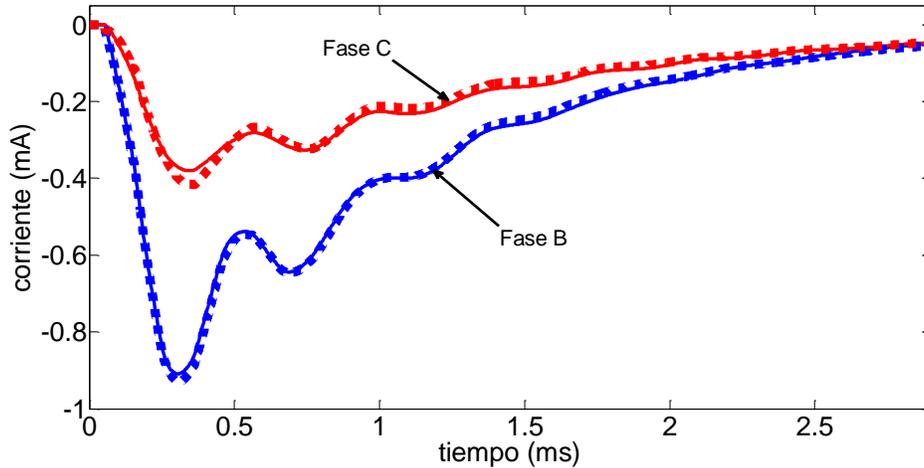


Figura 3.28. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADEMTDC (líneas punteadas) para los conductores a la mitad del cable.

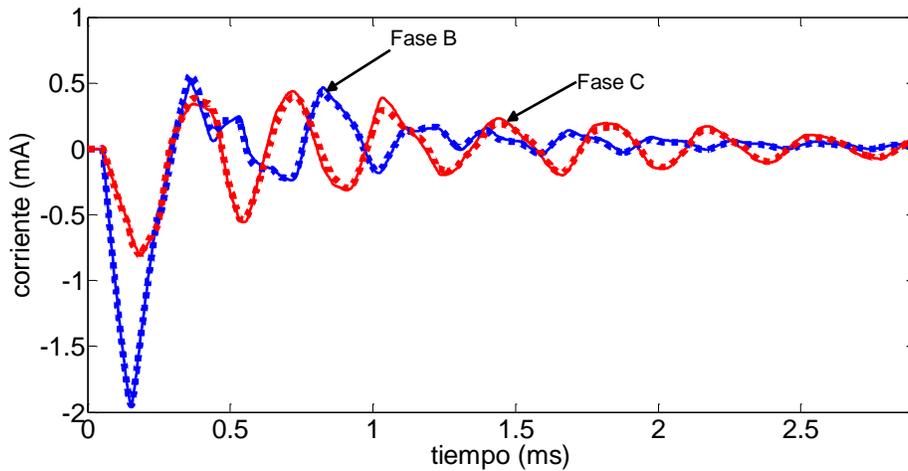


Figura 3.29. Comparación entre la TNL inversa (línea continua) y PSCADEMTDC (líneas punteadas) para los blindajes a la mitad del cable.

Los perfiles de tensión y corriente a lo largo de cada línea de la red de transmisión se calculan de la manera descrita en la sección 3.3.2. De la Figura 3.31 a la Figura 3.33 se muestran los perfiles de tensión a lo largo de los conductores de la línea 2. Adicionalmente, se realizó una simulación en ATP/EMTP con propósitos de validación. Debido a lo observado en la sección 3.4.1 al dividir la línea en varios segmentos en ATP/EMTP, para esta simulación se dividió cada línea de la red solamente en dos segmentos. De la Figura 3.34 a la Figura 3.37 se presenta la comparación entre los resultados de la TNL inversa y los de ATP/EMTP a la mitad de las líneas 2 y 3. Se pueden observar que en ambas comparaciones se tiene un alto grado de coincidencia entre los resultados de ambos métodos.

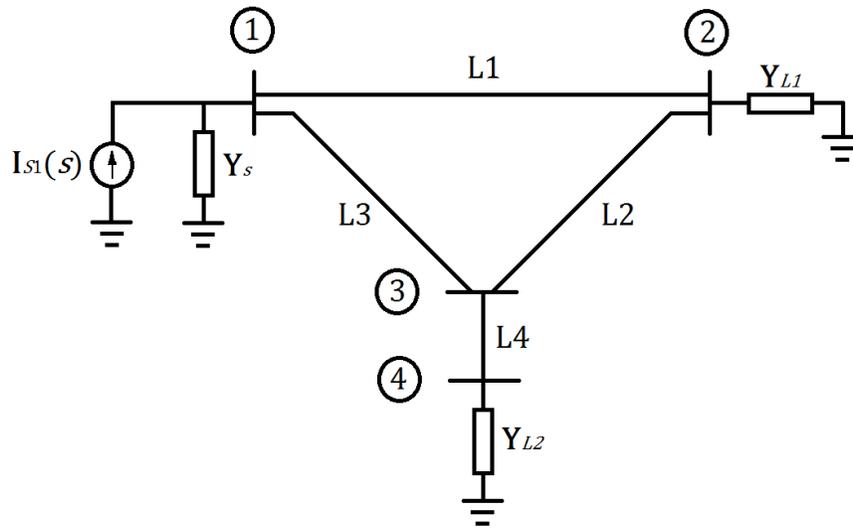


Figura 3.30. Red de transmisión utilizada para el caso de prueba.

Tabla 3.2. Longitud de las líneas y radio de los conductores.

Línea	Longitud (km)	Radio de los conductores (cm)
1	100	1.5
2	80	1.21
3	75	1.6
4	120	1.27

Tabla 3.3. Posición de los conductores.

Línea	Posición (desplazamiento horizontal, altura) (m)		
	Fase A	Fase B	Fase C
1	(0,36)	(0,30)	(0,25)
2	(0,30)	(0,25)	(0,20)
3	(0,27)	(4,27)	(8,27)
4	(0,30)	(5,30)	(10,30)

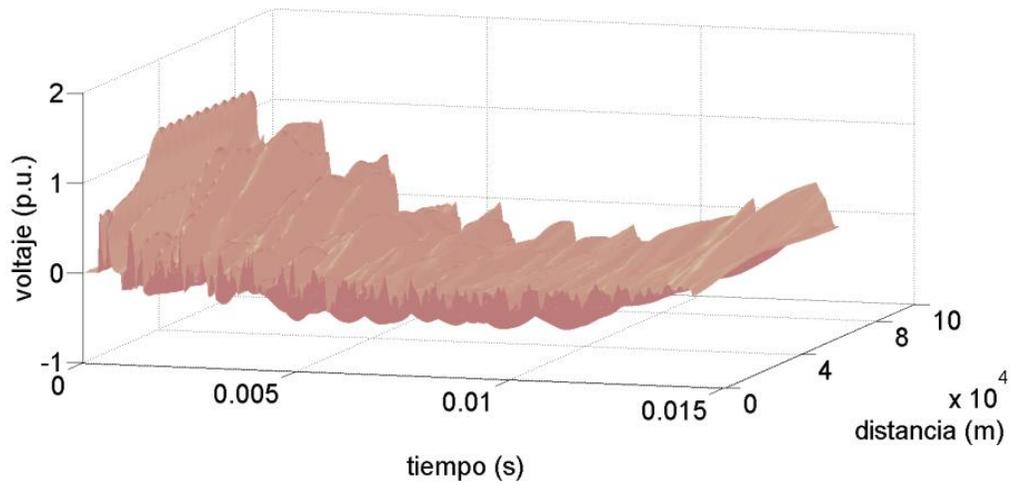


Figura 3.31. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase A de la línea 2.

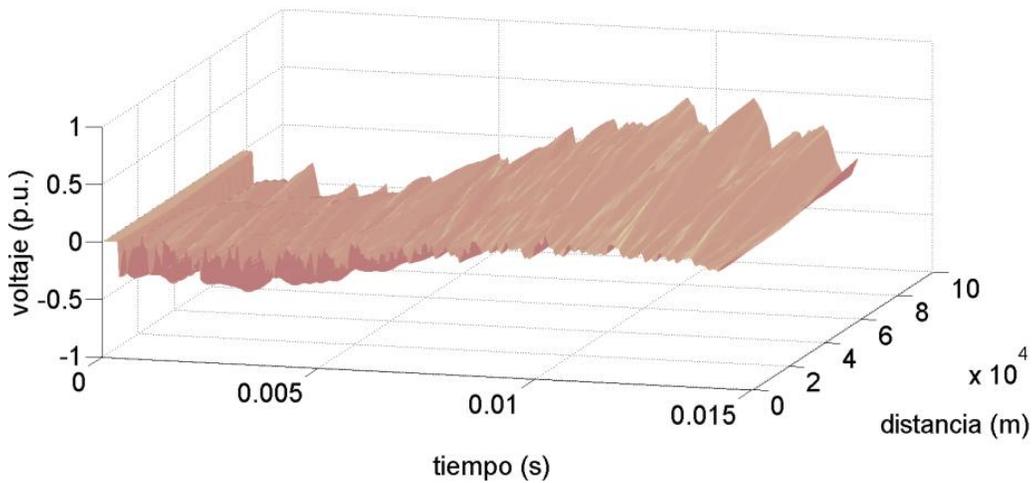


Figura 3.32. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase B de la línea 2.

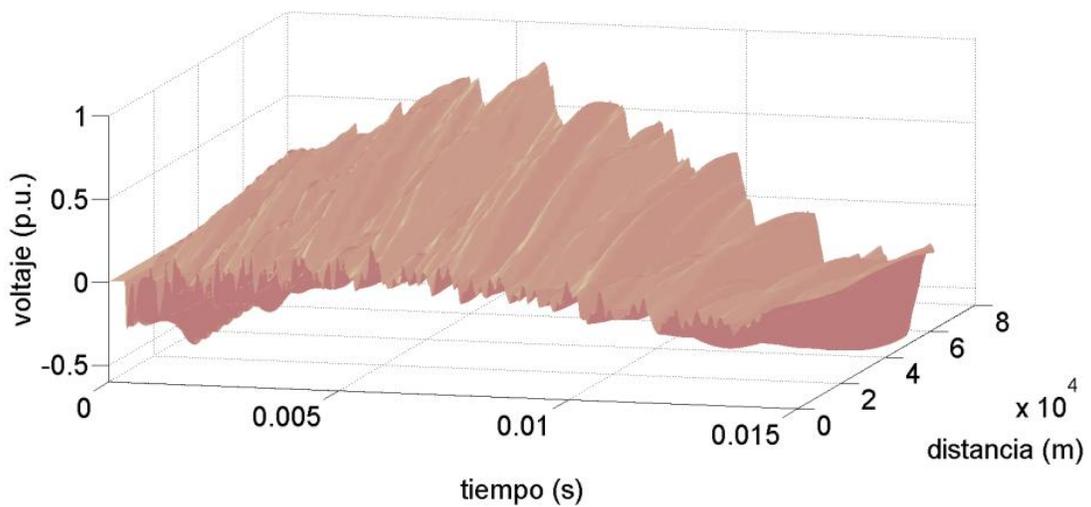


Figura 3.33. Gráfica en tres dimensiones del perfil de tensión a lo largo de la fase C de la línea 2.

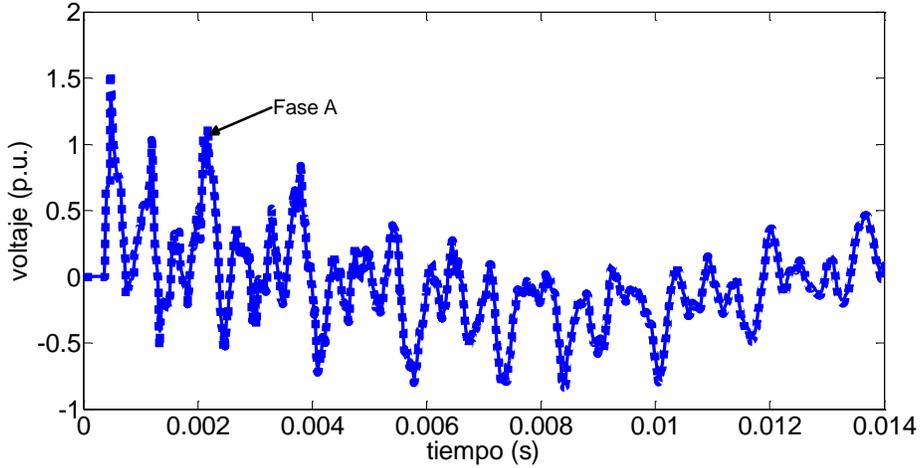


Figura 3.34. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase A de la línea 2.

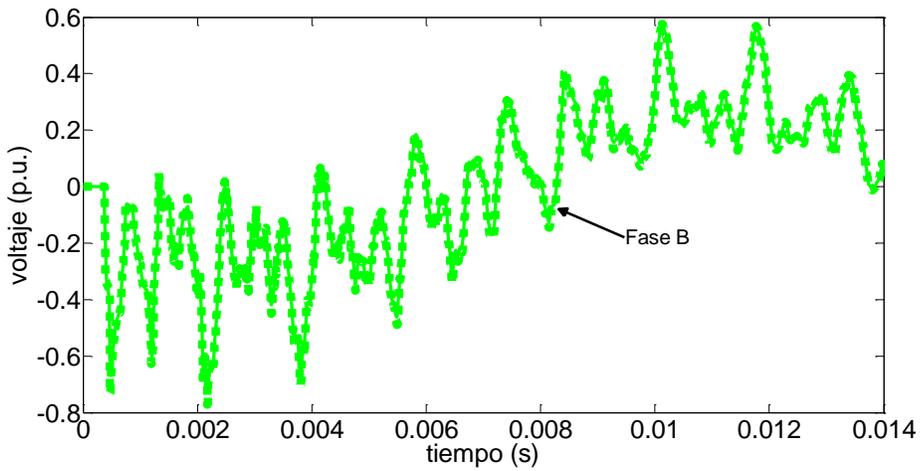


Figura 3.35. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase B de la línea 2.

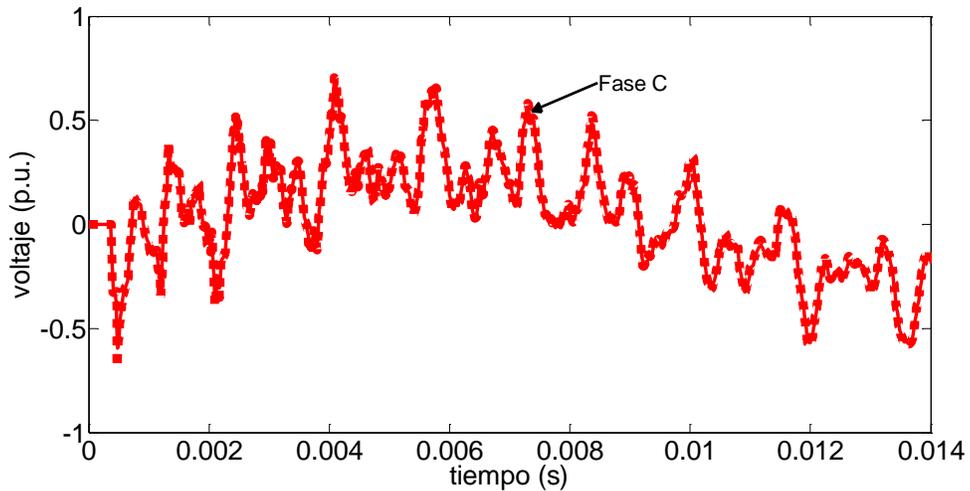


Figura 3.36. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la fase C de la línea 2.

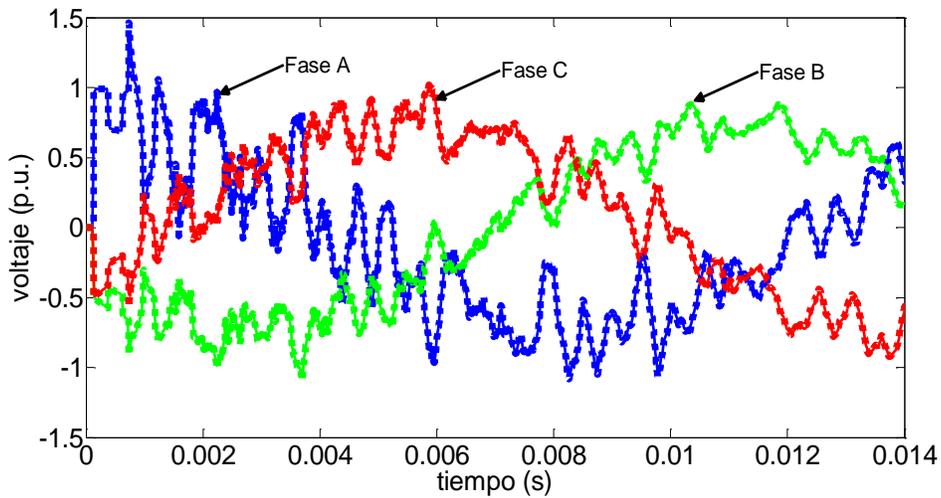


Figura 3.37. Comparación entre la TNL inversa (líneas continuas) y ATP/EMTP (líneas punteadas) para la línea 3.

Los resultados obtenidos en los casos de prueba presentados en este capítulo demuestran la efectividad y versatilidad del método propuesto en el cálculo de perfiles transitorios a lo largo de líneas aéreas, cables subterráneos, devanados de transformadores y redes de transmisión.

## Capítulo 4 Modelado de la Línea Iluminada en el Dominio $q$ - $s$

### 4.1 Introducción

Se le llama línea iluminada a una línea que se encuentra excitada por campos electromagnéticos externos. Este fenómeno es bastante común en los sistemas eléctricos de potencia, donde las líneas de transmisión son iluminadas por campos electromagnéticos incidentes debidos a descargas atmosféricas indirectas. Estos campos electromagnéticos causan sobretensiones transitorias en las líneas que pueden causar daños a éstas o a elementos cercanos de la red eléctrica. Aunque estos transitorios no son tan elevados como los generados por descargas atmosféricas directas sobre la línea, las descargas indirectas ocurren con mucho más frecuencia, por lo que su estudio es de gran importancia para un diseño correcto de las líneas de transmisión.

Se han realizado varios trabajos relacionados con la investigación de los transitorios que ocurren en las líneas iluminadas, destacando las formulaciones propuestas por Taylor [25], Agrawal [26] y Rachidi [27].

En este capítulo se propone un modelo de línea para obtener los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea en el dominio del tiempo, donde se incluyen los campos electromagnéticos incidentes basándose en la formulación de Taylor, la cual aproxima los campos incidentes a través de fuentes de tensión y de corriente distribuidas a lo largo de la línea.

También se describe la formulación propuesta por Master y Uman [21] para el cálculo de las magnitudes de los campos electromagnéticos incidentes en la línea. Esta formulación se utiliza en conjunto con el modelo propuesto en este trabajo para la obtención de los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea.

### 4.2 Cálculo de Perfiles de Tensión y Corriente a lo Largo de la Línea Iluminada

#### 4.2.1 *Inclusión de los Campos Electromagnéticos Incidentes*

Se considera un campo electromagnético que incide sobre una línea de transmisión, como se muestra en la Figura 4.1. Para la inclusión del efecto de este campo sobre la línea se toma en cuenta la formulación de Taylor, que considera los campos incidentes como fuentes de tensión y corriente distribuidas a lo largo

de la línea. Para esto se modifican las Ecuaciones del Telegrafista en el dominio de la frecuencia, definidas en (3.1), agregando un vector de tensiones y corrientes:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z, s) \\ \mathbf{I}(z, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z, s) \\ \mathbf{I}(z, s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(z, s) \\ \mathbf{I}_F(z, s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{V}_F(z, s)$  e  $\mathbf{I}_F(z, s)$  se calculan a partir de los campos electromagnéticos incidentes en la línea y se definen como [21]:

$$\mathbf{V}_F(z, s) = s \begin{bmatrix} h_1(z) & \vdots \\ \int_0^{h_1(z)} B_x(z, s) dy + E_{z,1}(0, s) \\ \vdots \\ \int_0^{h_n(z)} B_x(z, s) dy + E_{z,n}(0, s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{I}_F(z, s) = -\mathbf{Y} \begin{bmatrix} \int_0^h E_{y,1}(z, s) dy \\ \vdots \\ \int_0^h E_{y,n}(z, s) dy \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde  $h_i(z)$  es la altura del  $i$ -ésimo conductor,  $E_{y,i}(z, s)$  y  $B_x(z, s)$  son los componentes del campo eléctrico vertical y el campo magnético transversal, respectivamente.  $E_{z,i}(0, s)$  es el campo eléctrico horizontal al nivel del terreno.

Al aplicar la transformada de Laplace respecto a la coordenada  $z$  a (4.1), se obtiene la siguiente expresión algebraica en el dominio  $q$ - $s$ :

$$\begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{I}_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(q, s) \\ \mathbf{I}_F(q, s) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Agrupando términos se tiene:

$$\begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & q\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{I}_0(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(q, s) \\ \mathbf{I}_F(q, s) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Resolviendo (4.5) para  $[\mathbf{V}(q, s) \ \mathbf{I}(q, s)]^T$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & q\mathbf{U} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{I}_0(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(q, s) \\ \mathbf{I}_F(q, s) \end{bmatrix} \right) \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) presenta las tensiones y corrientes a lo largo de la línea en función de las tensiones y corrientes al inicio de ésta. Al igual que en el Capítulo 3, el problema se reduce a calcular  $\mathbf{V}_0(s)$  e  $\mathbf{I}_0(s)$ .

#### 4.2.2 Cálculo de las Tensiones y Corrientes al Inicio de la Línea

El cálculo de las tensiones y corrientes al inicio de la línea se realiza empleando la técnica de conexión en cascada de matrices cadena, la cual se ha empleado con buenos resultados para el cálculo de tensiones y corrientes transitorias debidas a campos incidentes [36] [37] [38].

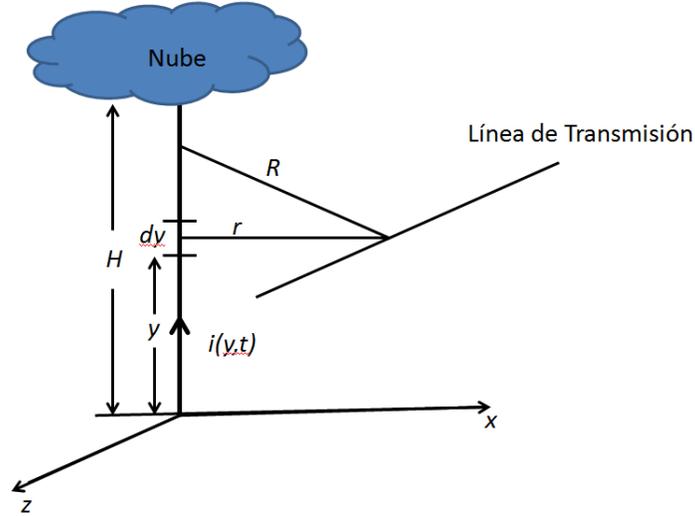


Figura 4.1. Configuración geométrica de la interacción entre el canal de descarga y la línea de transmisión [36].

La solución de (4.1) en términos de la matriz cadena para un segmento de línea de longitud  $\Delta z$  es [33]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(z + \Delta z, s) \\ \mathbf{I}(z + \Delta z, s) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\Delta z, s) \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z, s) \\ \mathbf{I}(z, s) \end{bmatrix} + \int_z^{z + \Delta z} \mathbf{\Phi}(z - \tau, s) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(\tau, s) \\ \mathbf{I}_F(\tau, s) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.7)$$

donde:

$$\mathbf{\Phi}(\Delta z, s) = \begin{bmatrix} \cosh(\mathbf{\Psi}\Delta z) & -\mathbf{Z}_0 \sinh(\mathbf{\Psi}\Delta z) \\ -\mathbf{Y}_0 \sinh(\mathbf{\Psi}\Delta z) & \cosh(\mathbf{\Psi}\Delta z) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{Y}_0 = \sqrt{\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{\Psi} = \sqrt{\mathbf{Z}\mathbf{Y}} \quad (4.10)$$

Si el segmento de línea es eléctricamente corto, la integral de (4.7) puede aproximarse como:

$$\int_z^{z + \Delta z} \mathbf{\Phi}(z - \tau, s) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(\tau, s) \\ \mathbf{I}_F(\tau, s) \end{bmatrix} d\tau \approx \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(z, s)\Delta z \\ \mathbf{I}_F(z, s)\Delta z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.11) en (4.7) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(z + \Delta z, s) \\ \mathbf{I}(z + \Delta z, s) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\Delta z, s) \begin{bmatrix} \mathbf{V}(z, s) \\ \mathbf{I}(z, s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(z, s)\Delta z \\ \mathbf{I}_F(z, s)\Delta z \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Aplicando la conexión en cascada de las matrices cadena correspondientes a cada segmento se puede llegar a una expresión en donde las fuentes de tensión y corriente conectadas a lo largo de la línea se pueden representar por un equivalente de fuentes de tensión y de corriente conectadas al final de la línea, como se presenta en la Figura 4.2. Esta expresión es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(L, s) \\ \mathbf{I}(L, s) \end{bmatrix} = \Phi(L) + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{FT}(L, s) \\ \mathbf{I}_{FT}(L, s) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde  $\Phi(L)$  es la matriz cadena de la línea completa y:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{FT}(L, s) \\ \mathbf{I}_{FT}(L, s) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{M-1} \left\{ \left[ \prod_{n=1}^{M-i-1} \Phi^{(M-n)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(i\Delta Z, s) \\ \mathbf{I}_F(i\Delta Z, s) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.14)$$

donde  $\Phi^i$  es la matriz cadena del  $i$ -ésimo segmento de línea.

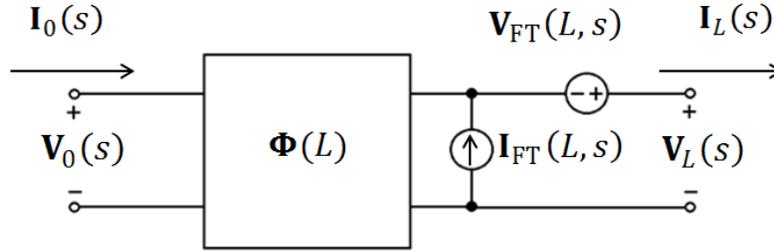


Figura 4.2. Representación de los efectos de los campos electromagnéticos incidentes por fuentes de tensión y corriente al final de la línea.

#### 4.2.2.1 Tensiones al Inicio de la Línea

Al manipular algebraicamente a (4.13) y tomar en cuenta las cargas conectadas en los extremos de la línea se obtiene un modelo de dos puertos de la línea, donde se incluyen los efectos de los campos electromagnéticos incidentes como fuentes de corriente conectadas a los extremos de la línea, está representación está dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{S0}(s) \\ \mathbf{I}_{SL}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ss} + \mathbf{Y}_s & -\mathbf{Y}_{sr} \\ -\mathbf{Y}_{sr} & \mathbf{Y}_{ss} + \mathbf{Y}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{V}_L(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{SC0}(s) \\ \mathbf{I}_{SCL}(s) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

donde:

$$\mathbf{Y}_{ss} = \mathbf{Y}_{rr} = -\Phi_{12}^{-1} \Phi_{11} = \Phi_{22} \Phi_{12}^{-1} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{Y}_{sr} = -\Phi_{12}^{-1} = \Phi_{22} \Phi_{12}^{-1} \Phi_{11} - \Phi_{21} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{I}_{SC0}(s) = -\Phi_{12}^{-1} \mathbf{V}_{FT}(L, s) \quad (4.18)$$

$$\mathbf{I}_{SCL}(s) = -\Phi_{22} \Phi_{12}^{-1} \mathbf{V}_{FT}(L, s) + \mathbf{I}_{FT}(L, s) \quad (4.19)$$

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$\mathbf{Y}_s$  y  $\mathbf{Y}_L$  corresponden a las cargas conectadas al principio y al final de la línea. Como se puede ver en (4.16) para el caso de línea uniforme  $\mathbf{Y}_{ss} = \mathbf{Y}_{rr}$ .

Resolviendo (4.15) para las tensiones al inicio de la línea se llega a:

$$\mathbf{V}_0(s) = -[\mathbf{Y}_{sr}^{-1}(\mathbf{Y}_{ss} + \mathbf{Y}_s) - (\mathbf{Y}_{ss} + \mathbf{Y}_L)^{-1} \mathbf{Y}_{sr}]^{-1} [\mathbf{Y}_{sr}^{-1} \mathbf{I}_{SC0}(s) + (\mathbf{Y}_s + \mathbf{Y}_L)^{-1} \mathbf{I}_{SCL}(s)] \quad (4.21)$$

#### 4.2.2.2 Corrientes al Inicio de la Línea

Las corrientes al inicio de la línea se obtienen de una manera similar a lo presentado en la sección 3.2, en donde se parte de la representación de dos puertos de la línea. Sin embargo, para el análisis de líneas iluminadas se puede suponer que no existen fuentes conectadas en los extremos de la línea, por lo que en este caso la ecuación (3.13) se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\mathbf{I}_0(s) = -\mathbf{Y}_s \mathbf{V}_0(s) \quad (4.22)$$

#### 4.2.3 Obtención de los Perfiles de Tensión y Corriente en el Dominio del Tiempo

Al sustituir (4.21) y (4.22) en (4.6) es posible expresar las tensiones y corrientes a lo largo de la línea en el dominio  $q$ - $s$  en función de la tensión al inicio de la línea en el dominio de la frecuencia y de las fuentes distribuidas a lo largo de la línea en el dominio  $q$ - $s$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(q, s) \\ \mathbf{I}(q, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q\mathbf{U} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & q\mathbf{U} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ -\mathbf{Y}_s \mathbf{V}_0(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_F(q, s) \\ \mathbf{I}_F(q, s) \end{bmatrix} \right) \quad (4.23)$$

Por medio de la aplicación sucesiva de la TNL inversa a (4.23) es posible obtener  $\mathbf{v}(z, t)$  e  $\mathbf{i}(z, t)$ , esto es, los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea.

### 4.3 Cálculo de los Campos Electromagnéticos Incidentes

En la Figura 4.1 se presenta la configuración en la que una línea de transmisión se ve excitada por un campo electromagnético incidente debido a una descarga atmosférica cercana. El cálculo del efecto de los campos incidentes sobre la línea se realiza con las formulaciones desarrolladas por Master y Uman [21], donde se toman en cuenta parámetros como la ubicación de la descarga respecto a la línea y la forma de onda de la corriente en la base del canal de descarga, así como el terreno como un conductor perfecto.

Los componentes de campo eléctrico y magnético generados por cada segmento diferencial del canal de descarga se definen como [21]:

$$dE_r(r, y, t) = \frac{dy}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3r(h-y)}{R^5} \int_0^t i\left(y, \tau - \frac{R}{c}\right) d\tau + \frac{3r(h-y)}{cR^4} i\left(y, t - \frac{R}{c}\right) + \frac{r(h-y)}{c^2R^3} \frac{\partial i(y, t - R/c)}{\partial t} \right] \quad (4.24)$$

$$dE_y(r, y, t) = \frac{dy}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2(h-y)^2 - r^2}{R^5} \int_0^t i\left(y, \tau - \frac{R}{c}\right) d\tau + \frac{3(h-y) - r^2}{cR^4} i\left(y, t - \frac{R}{c}\right) - \frac{r^2}{c^2R^3} \frac{\partial i(y, t - R/c)}{\partial t} \right] \quad (4.25)$$

$$dB(r, y, t) = \frac{\mu_0 dy}{4\pi} \left[ \frac{r}{R^3} i\left(y, \tau - \frac{R}{c}\right) + \frac{r}{cR^2} \frac{\partial i(y, t - R/c)}{\partial t} \right] \quad (4.26)$$

donde  $r$  es la distancia horizontal del canal de descarga y un punto de la línea,  $h$  es la altura de la línea,  $R$  es la distancia entre un punto de la línea y un segmento diferencial del canal de descarga y  $c$  corresponde a la velocidad de la luz en el vacío. La corriente a lo largo del canal de descarga es  $i(y, t)$ , que se define como:

$$i(y, t) = \exp(-\alpha y) i(0, t - y/v) \quad (4.27)$$

donde  $\alpha$  la constante de atenuación de la corriente en el canal de descarga,  $v$  es la velocidad de la corriente de retorno e  $i(0, t)$  es la corriente en el canal de descarga al nivel del terreno.

Al aplicar la transformada de Laplace respecto al tiempo a (4.24), (4.25) y (4.26) e integrando a lo largo del canal de descarga y su imagen se llega a:

$$E_r(r, y, s) = \frac{\exp(-Rs/c)}{4\pi\epsilon_0} \int_{-H}^H I(y, s) \left[ \frac{3r(h-y)}{R^5} + \frac{3r(h-y)}{cR^4} + \frac{r(h-y)}{c^2R^3} \right] dy \quad (4.28)$$

$$E_y(r, y, s) = \frac{\exp(-Rs/c)}{4\pi\epsilon_0} \int_{-H}^H I(y, s) \left[ \frac{2(h-y)^2 - r^2}{R^5} + \frac{2(h-y)^2 - r^2}{cR^4} - \frac{r^2 s}{c^2R^3} \right] dy \quad (4.29)$$

$$B(r, y, s) = \frac{\mu_0 \exp(-Rs/c)}{4\pi} \int_{-H}^H I(y, s) \left[ \frac{r}{R^3} + \frac{r}{cR^2} \right] dy \quad (4.30)$$

donde  $H$  es la altura de la nube e  $I(y, s)$  es la corriente a lo largo del canal de descarga en el dominio de la frecuencia y se encuentra definida como:

$$I(y, s) = \exp(-\alpha y) \exp(-ys/v) I(0, s) \quad (4.31)$$

Para considerar una conductividad finita del terreno, se utiliza la expresión de Cooray-Rubinstein [24], obteniéndose la siguiente expresión del campo eléctrico horizontal:

$$\tilde{E}_r(r, y, s) = E_r(r, y, s) - \frac{cB(r, 0, s)}{\sqrt{\epsilon_{rt} + 1/\epsilon_0\rho_t s}} \quad (4.32)$$

donde  $B(r, 0, s)$  es el campo magnético al nivel del suelo para un terreno conductor perfecto,  $\epsilon_{rt}$  es la permitividad relativa del terreno,  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío y  $\rho_t$  es la resistividad del terreno.

El campo eléctrico vertical se calcula de forma similar obteniendo:

$$\tilde{E}_y(r, y, s) = E_y(r, y, s) - \frac{cB(r, 0, s)}{\sqrt{\epsilon_{rt} + 1/\epsilon_0\rho_t s}} \quad (4.33)$$

Sustituyendo (4.30), (4.32) y (4.33) en (4.2) y (4.3) es posible calcular los efectos de los campos electromagnéticos representados por fuentes de tensión y corriente distribuidas a lo largo de la línea en el dominio de la frecuencia; aplicando la TNL directa con respecto a la coordenada  $z$  se obtienen las fuentes en el dominio  $q$ - $s$ , las cuales se pueden sustituir en (4.23) para la obtención de las tensiones y corrientes a lo largo de la línea en el dominio  $q$ - $s$ .

#### 4.4 Casos de Prueba

En esta sección se presenta la aplicación del modelo presentado en este capítulo.

La primera parte de la sección se enfoca en la validación del modelo de línea iluminada presentado en la sección 4.2 por medio de la comparación con resultados de un modelo de línea realizado en ATP/EMTP utilizando fuentes de tensión y corriente distribuidas definidas analíticamente.

En la segunda parte de esta sección se implementa el efecto de los campos electromagnéticos incidentes, calculados como se muestra en la sección 4.3, en el modelo de línea iluminada.

En todos los casos presentados, al igual que en los casos de prueba del Capítulo 3, se toma en cuenta la dependencia frecuencial de los parámetros de la línea por medio del método de imágenes complejas [46].

#### 4.4.1 Validación Mediante Comparaciones con ATP/EMTP

A continuación se presentan dos casos de prueba en los que se utilizan fuentes distribuidas definidas por funciones analíticas; en ambos casos se presentan comparaciones con resultados obtenidos utilizando ATP/EMTP.

Ambos casos presentados utilizan la misma configuración de línea, la cual consiste en una línea de transmisión aérea uniforme de tres conductores, a una altura de 16 m y una separación entre fases de 5 m; el radio de los conductores es de 1.58 cm. Se utiliza un muestreo de 1024 muestras tanto para el tiempo como para la distancia, y se tiene un tiempo de observación de 45  $\mu$ s.

##### 4.4.1.1 Caso A: Fuentes Distribuidas de Tensión.

En este caso de prueba se introducen fuentes de tensión distribuidas a lo largo de la línea y no se consideran fuentes de corriente. La magnitud de estas fuentes se encuentran en función de la posición, y se definen por:

$$V_F(z, s) = \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (4.34)$$

donde  $L$  representa la longitud de la línea.

Al introducir (4.34) en (4.6) y aplicar de manera sucesiva la TNL inversa se obtienen los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea en el dominio del tiempo. La Figura 4.3 muestra el perfil de tensión de la fase A.

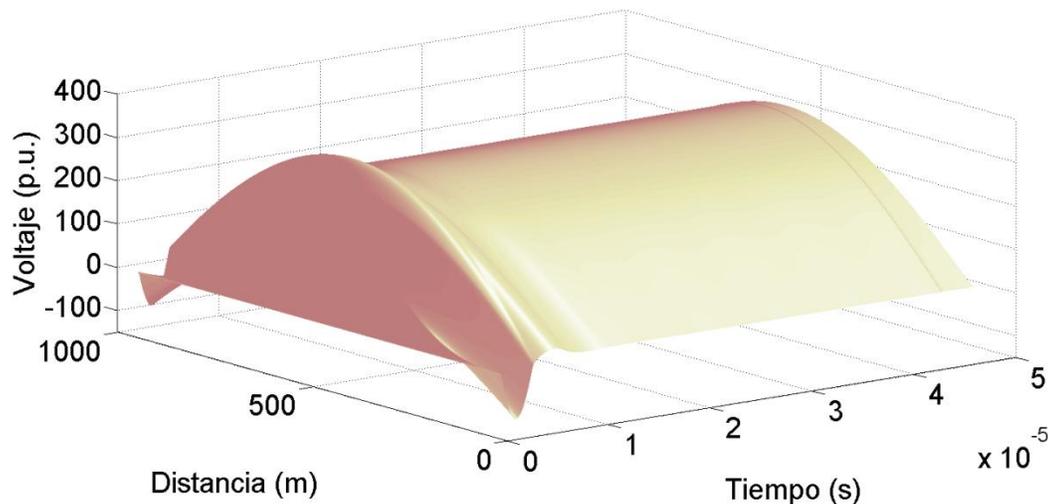


Figura 4.3. Perfil de tensión a lo largo de la fase A con excitación de fuentes de tensión distribuidas.

Con motivos de validación, se realizó la misma simulación utilizando un modelo construido en ATP/EMTP, el cual se muestra en la Figura 4.4. Este modelo se realizó dividiendo la línea en varios segmentos e introduciendo fuentes de tensión entre cada segmento, las cuales tienen una magnitud definida por (4.11) y (4.34).

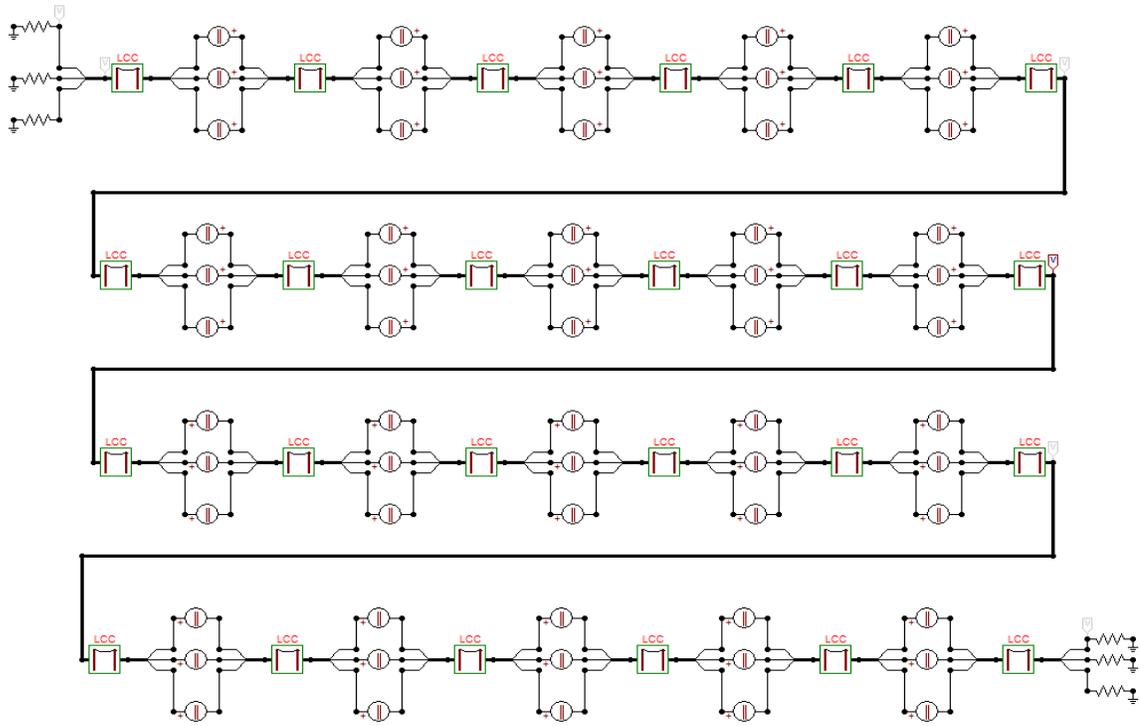


Figura 4.4. Modelo de ATP utilizado para simular una línea iluminada.

En la Figura 4.5 se muestra una comparación entre los resultados obtenidos con la aplicación sucesiva de la TNL inversa y los de ATP a un cuarto y a la mitad de la longitud del conductor de la fase A:

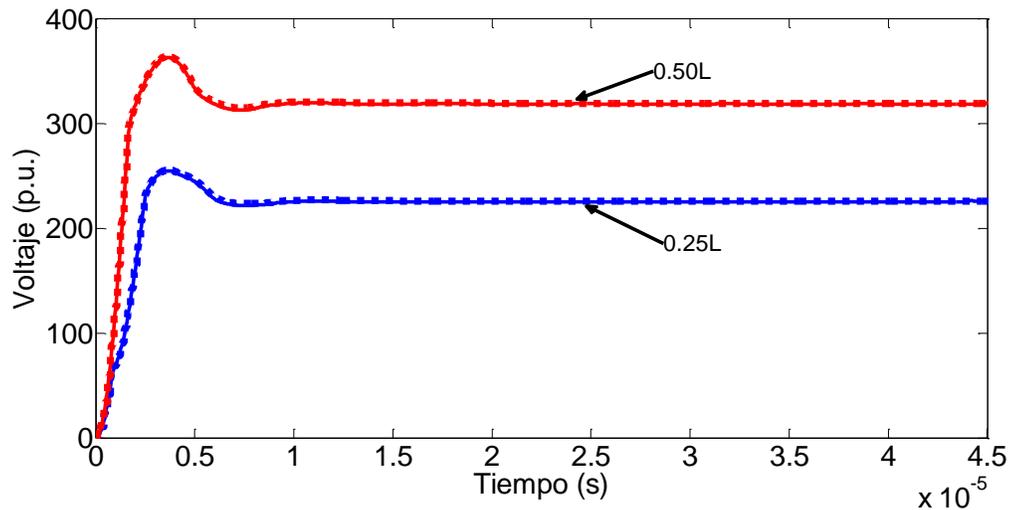


Figura 4.5. Comparación del modelo de línea iluminada entre la aplicación sucesiva de la TNL inversa (línea continua) y ATP/EMTP (línea punteada).

Se puede observar en la Figura 4.5 que ambos resultados tienen un alto nivel de coincidencia.

#### 4.4.1.2 Caso B: Fuentes Distribuidas de Corriente

En este caso se introducen fuentes distribuidas de corriente de tipo escalón unitario a lo largo de la línea y no se consideran fuentes de tensión. Al igual que en el punto anterior, se realizó una simulación en ATP/EMTP para validar los resultados obtenidos en este trabajo.

El perfil de tensión obtenido en la fase A al aplicar de manera sucesiva la TNL inversa se presenta en la Figura 4.6.

La comparación entre los resultados obtenidos con la aplicación de sucesiva de la TNL inversa y los de ATP/EMTP se muestra en la Figura 4.7. Al igual que en el primer caso, los resultados obtenidos por ambos medios tienen un alto nivel de coincidencia, demostrando la viabilidad del modelo propuesto para el cálculo y análisis de perfiles transitorios de tensión y corriente en líneas iluminadas.

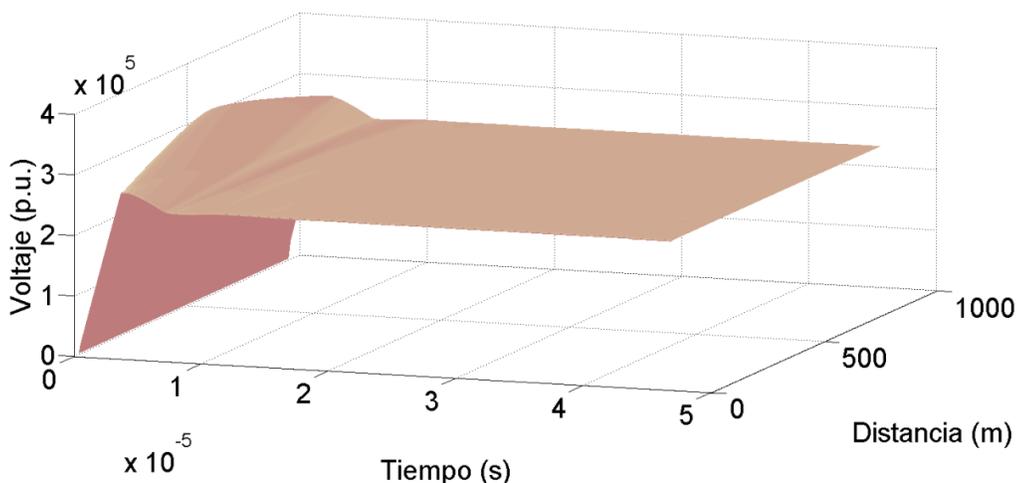


Figura 4.6. Perfil de tensión a lo largo de la fase A con excitación de fuentes de corriente distribuidas.

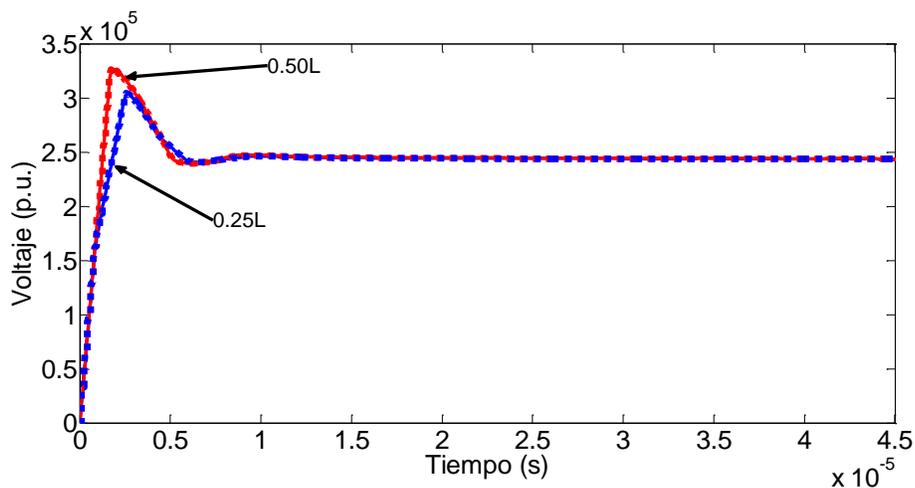


Figura 4.7. Comparación del modelo de línea iluminada entre la aplicación sucesiva de la TNL inversa (línea continua) y ATP/EMTP (línea punteada).

#### 4.4.2 Implementación de Campos Electromagnéticos Incidentes

A continuación se presentan tres casos de prueba en los que se incluyen los efectos debidos a campos electromagnéticos incidentes generados por una descarga atmosférica cercana a la línea de transmisión. Como se menciona en la sección 4.3, uno de los valores más importantes para determinar los efectos de una descarga indirecta en la línea es la corriente en la base del canal de descarga. En este trabajo se utiliza una superposición de funciones tipo Heidler para simular esta corriente, como se describe en el Apéndice A.

En todos los casos se tiene el mismo arreglo de la línea de transmisión, variando entre ellos el lugar donde impacta la descarga respecto a la línea. Las características de la línea se presentan en la Tabla 4.1.

Se utilizó un muestreo de 512 muestras en el tiempo y 1024 muestras en el espacio. La reducción en el muestreo en el tiempo en comparación con los casos anteriores es para disminuir el tiempo de cómputo requerido para el cálculo del efecto de los campos electromagnéticos incidentes. El tiempo de observación es de  $9.5 \mu\text{s}$ , la constante de atenuación de la corriente en el canal de descarga  $\alpha$  es  $1/1700$ , la velocidad de propagación de la corriente de retorno  $v$  se toma como 11% de la velocidad de la luz en el vacío y se considera una altura de la nube de 1200 m.

Tabla 4.1. Datos de la línea de transmisión para los casos de prueba.

Longitud de la línea	500 m
Altura de la línea	10 m
Radio del conductor	7.5 mm
Separación horizontal entre conductores adyacentes	2 m
Resistividad del conductor	$3.21 \times 10^{-8} \Omega/\text{m}$
Resistividad del terreno	100 $\Omega/\text{m}$

##### 4.4.2.1 Caso A

Se considera una descarga atmosférica indirecta que impacta a 300 m del nodo emisor de la línea, y a una distancia perpendicular a la línea de 50 m, como se muestra en la Figura 4.8.

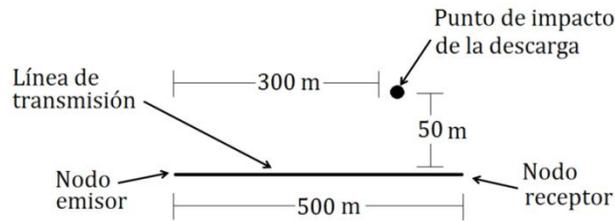


Figura 4.8. Configuración geométrica para el caso A.

En la Figura 4.9 se presenta el perfil de tensión obtenido a lo largo del conductor de la línea, y en la Figura 4.10 se presenta una perspectiva diferente del mismo perfil de tensión, donde se puede apreciar que la tensión más alta que se genera en la línea es en el punto que se encuentra más cercano a la línea, y conforme se aleja de la línea la tensión va disminuyendo gradualmente.

Con software para análisis transitorio tradicional no es posible obtener gráficas como las presentadas en las Figura 4.9 y Figura 4.10, por lo que se pueden apreciar las ventajas que presenta el método propuesto.

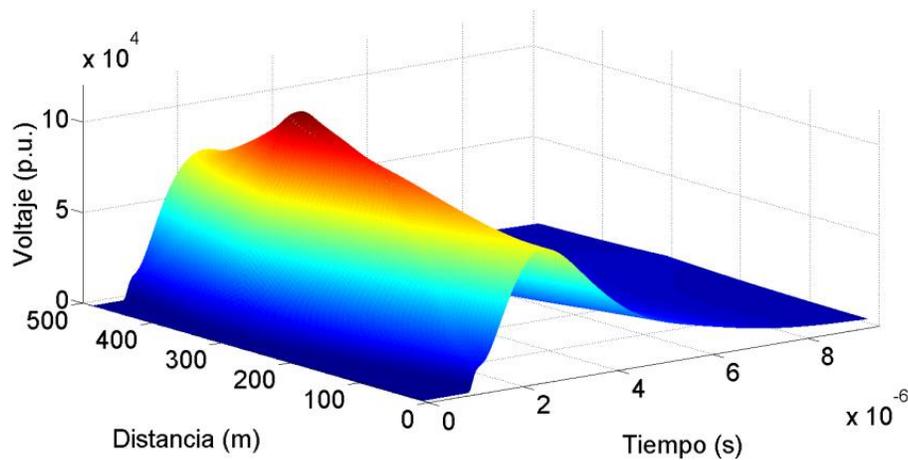


Figura 4.9. Perfil de tensión en la fase A

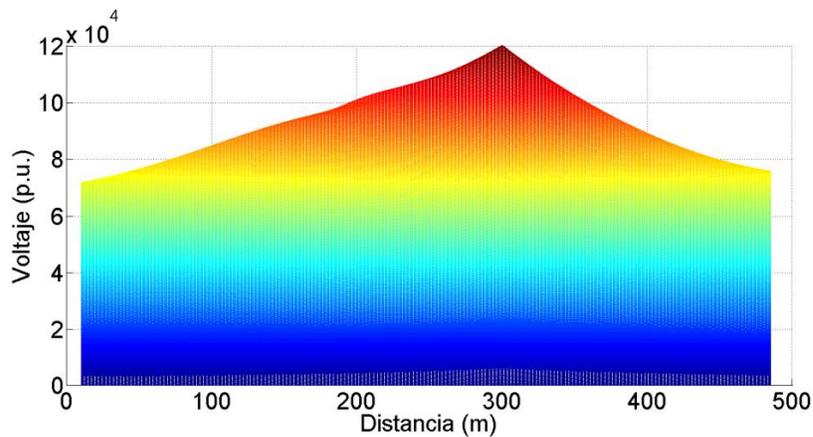


Figura 4.10. Distribución de tensión a lo largo de la fase A.

Adicionalmente, con propósitos de validación, se realizó una simulación en PSCAD/EMTDC utilizando el modelo de la Figura 4.11. La Figura 4.12 presenta la comparación entre los resultados obtenidos con ambos métodos para los nodos emisor y receptor de la fase B de la línea de transmisión. Se puede observar que existe una gran coincidencia entre ambos resultados.

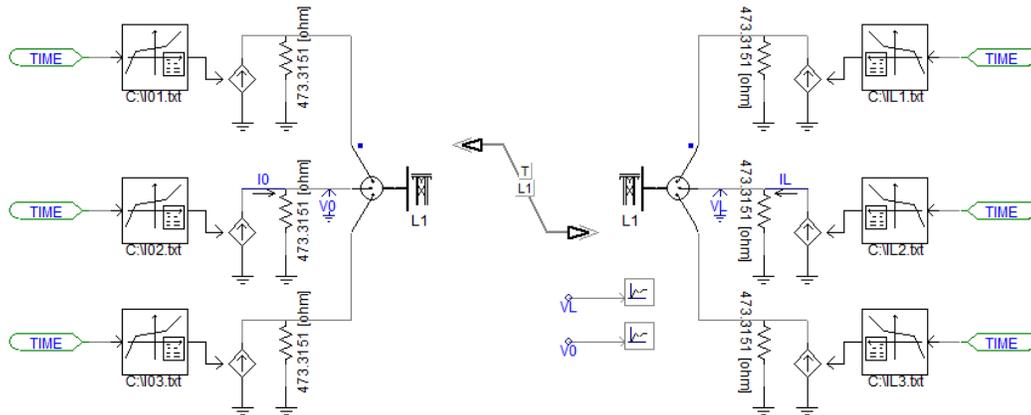


Figura 4.11. Modelo utilizado en PSCAD/EMTDC para la validación del método.

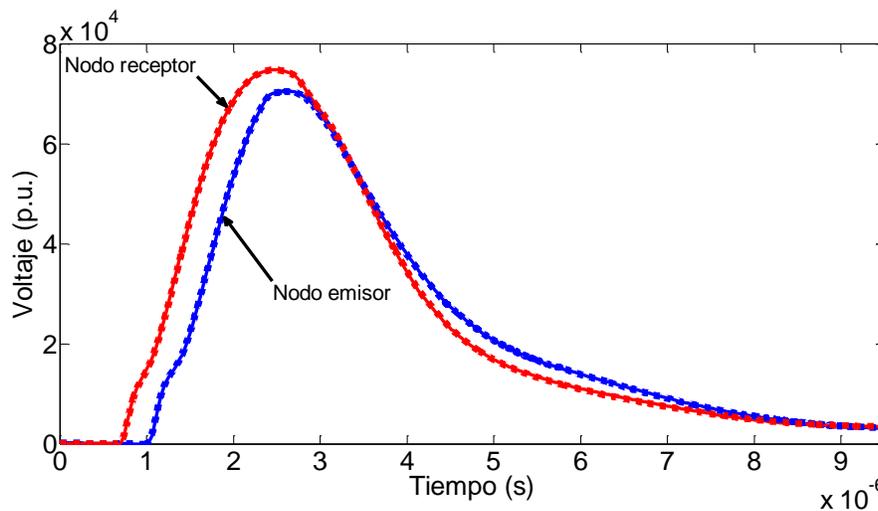


Figura 4.12. Comparación entre los resultados de la aplicación sucesiva de la TNL inversa (línea sólida) y PSCAD/EMTDC (línea punteada).

#### 4.4.2.2 Caso B

Al igual que en el caso A, la descarga atmosférica se encuentra a una distancia perpendicular a la línea de 50 m, pero impacta a 150 m del nodo emisor, como se muestra en la figura 4.13.

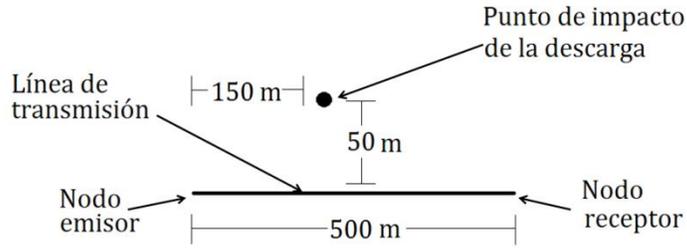


Figura 4.13. Configuración geométrica para el caso B.

Las Figuras 4.14 y 4.15 muestran el perfil de tensión a lo largo del conductor de la fase A. A diferencia del caso A, en esta ocasión la máxima tensión de la línea se encuentra a 150 m del nodo emisor, por lo que la máxima tensión se desplaza junto con el punto de impacto de la descarga, como era de esperarse.

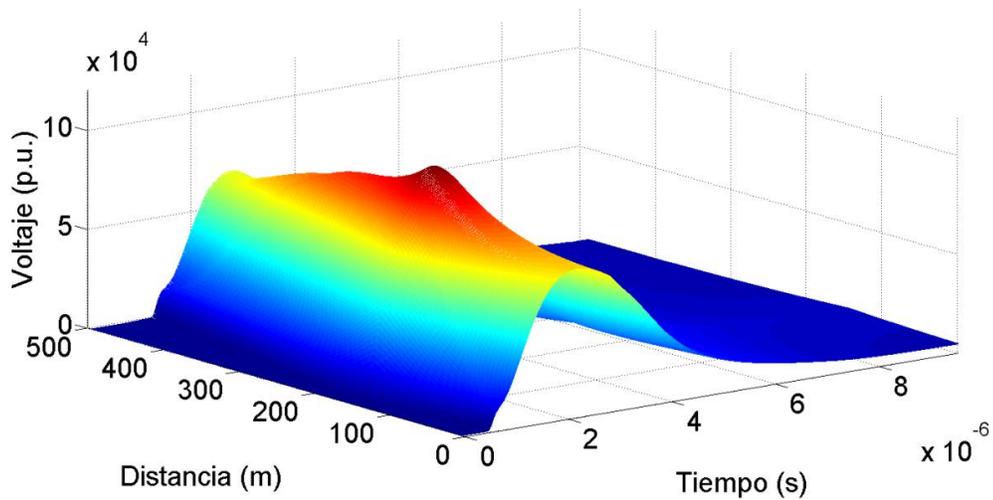


Figura 4.14. Perfil de tensión a lo largo de la fase A para el caso de prueba B.

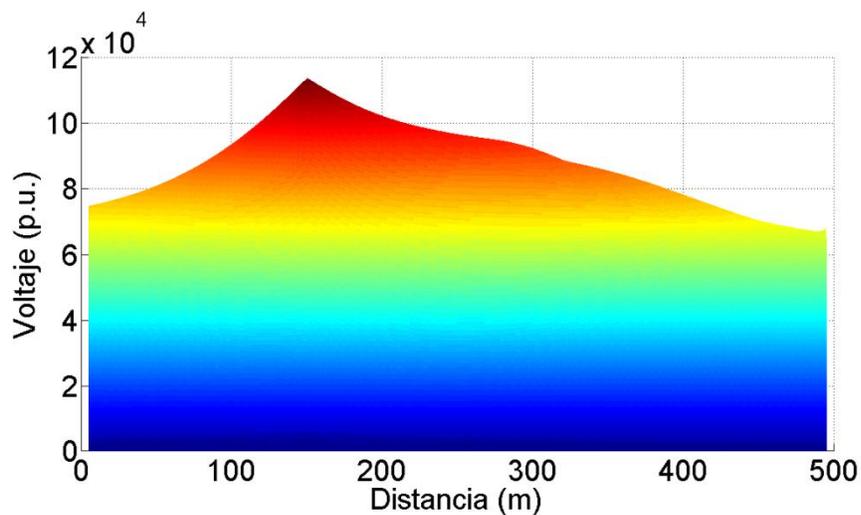


Figura 4.15. Perfil de tensión a lo largo de la fase A.

#### 4.4.2.3 Caso C

La configuración geométrica utilizada en este caso se presenta en la Figura 4.16.

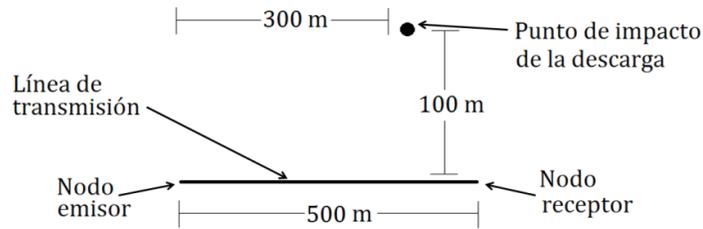


Figura 4.16. Configuración geométrica para el caso C

El perfil de tensión obtenido para la fase A se presenta en las Figuras 4.17 y 4.18. Se puede observar que la tensión máxima alcanzada en la línea es menor que en los casos A y B, debido a que la descarga impacta en un punto más alejado.

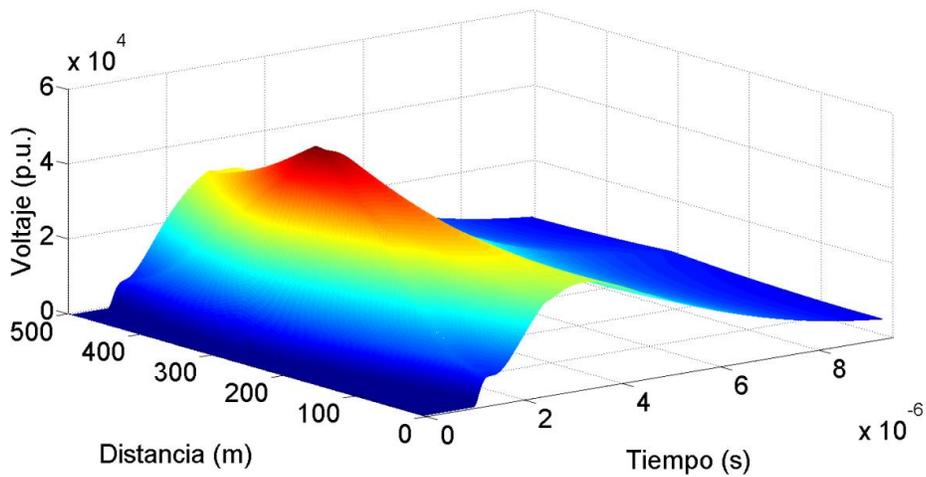


Figura 4.17. Perfil de tensión a lo largo de la fase A para el caso de prueba C

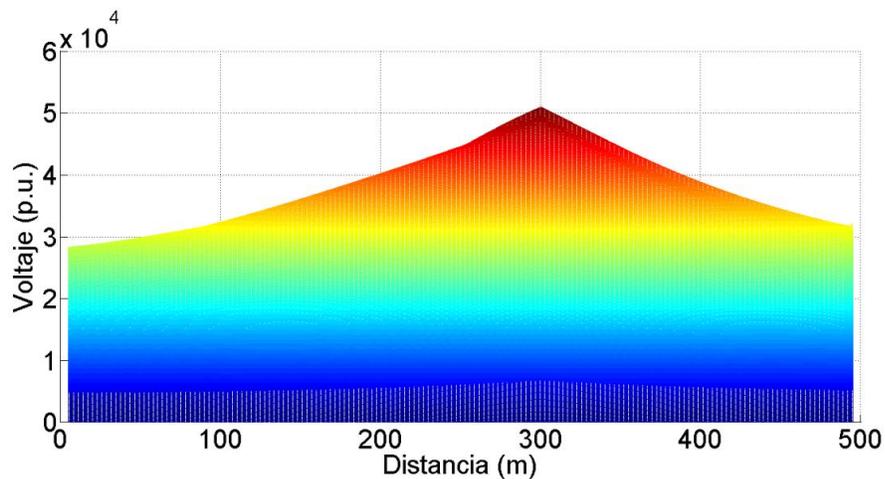


Figura 4.18. Perfil de tensión a lo largo de la fase A.

De los casos de prueba presentados en esta sección se puede observar que el modelo propuesto presenta buenos resultados para el cálculo de perfiles de tensión y corriente a lo largo de líneas de transmisión iluminadas. Las validaciones con resultados de ATP/EMTP para fuentes analíticas y con PSCAD/EMTDC para campos incidentes demuestran la eficacia del método para realizar de este tipo de estudios.

## Capítulo 5 Conclusiones

### 5.1 Conclusiones

En este trabajo se propuso un modelo de línea de transmisión que permite calcular los perfiles transitorios de tensión y corriente a lo largo de la línea. El modelo se desarrolló en el dominio  $q$ - $s$ , en el cual las Ecuaciones del Telegrafista consisten en ecuaciones algebraicas fáciles de resolver para tensión y corriente y, aplicando de manera sucesiva (respecto al tiempo y al espacio) la TNL inversa, se pueden obtener los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea en el dominio del tiempo. Debido a que se trabaja en el dominio de la frecuencia, se puede incluir de manera sencilla la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea. El modelo se validó mediante comparaciones con resultados de simulaciones realizadas en ATP/EMTP, observándose un alto grado de coincidencia.

Adicionalmente, se implementó el método descrito para el cálculo de perfiles transitorios en otros elementos de la red eléctrica, como lo son devanados de transformadores, redes de transmisión y cables subterráneos:

- Para la aplicación del método a transformadores se utiliza un modelo de línea multiconductora donde cada conductor representa un segmento del devanado y se aplica una conexión tipo zigzag; la aplicación del método a devanados de transformadores permite obtener de manera detallada la distribución de tensión a lo largo de cada vuelta del transformador, y no sólo en los extremos de las mismas como lo es con los métodos tradicionales. Esto puede ayudar a obtener un mejor diseño del aislamiento de estos equipos. La validación de esta aplicación se realizó comparando los resultados obtenidos con los de una simulación realizada con un modelo de dos puertos en el dominio de la frecuencia, obteniendo buenos resultados.
- En la aplicación a redes de transmisión se obtienen las tensiones y corrientes al inicio de cada línea utilizando un modelo de dos puertos en el dominio de la frecuencia. A partir de esto es posible obtener los perfiles de tensión y corriente para cada línea que forma parte de la red de transmisión. Esta aplicación es particularmente útil para el análisis de transitorios electromagnéticos causados por maniobras de interruptores, ya que estos pueden afectar a elementos de la red que se encuentren a grandes distancias del interruptor. Los resultados obtenidos con el método propuesto se compararon con los obtenidos en una simulación realizada en ATP/EMTP.

- La aplicación a cables se realiza utilizando el modelo propuesto de manera directa, donde cada conductor del modelo de línea multiconductora puede representar un elemento diferente del cable, como es el conductor o el blindaje. Se compararon los resultados obtenidos utilizando este método con los obtenidos en una simulación empleando PSCAD/EMTDC, obteniendo un alto grado de coincidencia entre ambos resultados.

El modelo desarrollado también fue implementado para el cálculo de perfiles transitorios en líneas de transmisión excitadas por campos magnéticos incidentes debidos a descargas atmosféricas cercanas. En esta aplicación se toman en cuenta los efectos de estos campos por medio de fuentes de tensión y corriente distribuidas a lo largo de la línea [25], los cuales se calculan a partir de las formulaciones de Master y Uman [21].

A diferencia del método propuesto en este trabajo, los programas tradicionales para el cálculo de transitorios (ATP/EMTP y PSCAD/EMTDC) no permiten obtener de una manera sencilla los perfiles de tensión y corriente a lo largo de la línea, ya que para esto es necesario dividir la línea modelada en varios segmentos y tomar una medición en cada uno de ellos, lo cual consume una gran cantidad de tiempo del usuario para la construcción de dicho modelo; además, si en estos programas se requiere analizar casos que consideran líneas de transmisión con características diferentes entre sí (altura, longitud, radio del conductor, etc.), es necesario reconstruir todo el modelo para su estudio, lo cual no es práctico y consume una gran cantidad de tiempo.

Por otro lado, otra ventaja que presenta el modelo propuesto en este trabajo es que puede incluir de manera sencilla el efecto de campos electromagnéticos incidentes, mientras que usando software tradicional es necesario definir individualmente las fuentes distribuidas a lo largo de la línea, lo que puede consumir una gran cantidad de tiempo para construir el modelo y, en caso de que se consideren fuentes que no se encuentran definidas por funciones analíticas, la complejidad de la construcción del modelo aumenta en gran medida.

Por lo anterior, el modelo propuesto es una herramienta útil en el cálculo de perfiles transitorios de tensión y corriente, permitiendo observar el comportamiento de puntos internos de elementos de la red eléctrica, lo cual puede ser de gran utilidad durante el diseño del sistema de aislamiento y protección de estos elementos.

## 5.2 Aportaciones

- El modelo de línea de transmisión presentado permite el cálculo de perfiles transitorios de tensión y corriente a lo largo de la línea en el dominio del tiempo, lo cual es complicado de obtener con software de análisis transitorio convencional. Este modelo también se implementó para el cálculo de perfiles transitorios en devanados de transformadores, redes de transmisión y cables subterráneos.
- Se propuso un modelo para el cálculo de perfiles transitorios de tensión y corriente a lo largo líneas de transmisión iluminadas por campos electromagnéticos incidentes. En este modelo se toma en cuenta el efecto de los campos incidentes a través de fuentes distribuidas de tensión y corriente conectadas a lo largo de la línea de transmisión.
- Los modelos propuestos trabajan en el dominio  $q$ - $s$  (frecuencia espacial-frecuencia temporal), lo que permite la inclusión de la dependencia frecuencial de los parámetros de la línea de manera directa sin la necesidad de utilizar aproximaciones numéricas que pueden introducir errores en el resultado.

## 5.3 Recomendaciones Para Trabajos Futuros

Las recomendaciones que se proponen para extender lo presentado con trabajos futuros son las siguientes:

- Validación del modelo presentado con pruebas experimentales, ya que todas las validaciones en este trabajo se realizaron mediante comparaciones con resultados obtenidos en programas computacionales.
- Inclusión de no uniformidades en la línea, las cuales se deben a la variación de los parámetros eléctricos respecto a la distancia, como es el caso de la catenaria entre torres.
- Implementación de elementos no lineales en el modelo, tales como apartarrayos, y la extensión del modelo para poder analizar sistemas variantes en el tiempo.

## Referencias

- [1] A. Greenwood, *Electrical transients in power systems*, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [2] J. Martínez-Velásco, F. de León, P. Gómez y M. Rioual, *Power System Transients: Parameter Determination*, Boca Ratón FL: CRC Press, 2009, pp. 177-250.
- [3] L. A. Siegert C., *Alta tensión y sistemas de transmisión*, México, D.F.: LIMUSA, 1989.
- [4] Bonneville Power Administration, *Electromagnetic Transient Program Theory Book*, Portland, USA, 1995.
- [5] A. Budner, «Introduction of Frequency Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transient Program» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 89, pp. 88-97, 1970.
- [6] J. K. Snelson, «Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines Frequency Dependent Parameters» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 91, pp. 85-91, 1972.
- [7] W. S. Meyer y H. W. Dommel, «Numerical Modeling of Frequency-Dependent Transmission Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 93, pp. 1401-1409, 1974.
- [8] A. Semlyen y A. Dabuleanu, «Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines with Ground Return Using Recursive Convolutions» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 94, pp. 561-571, 1975.
- [9] J. Martí, «Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations» *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. 101, nº 1, pp. 147-157, 1982.
- [10] L. Martí, «Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency Dependent Modal Transformations Matrices» *IEEE Transactions on Power*

*Delivery*, vol. 3, nº 3, pp. 1099-1110, 1988.

- [11] B. Gustavsen y A. Semlyen, «Combined Phase Domain and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting» *IEEE Transactions Power Delivery*, vol. 13, nº 2, pp. 596-604 1998.
- [12] P. Moreno, P. Gómez, J. L. Naredo y J. L. Guardado, «Frequency Domain Transient Analysis of Electrical Networks Including Non-Linear Conditions» *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 27, pp. 139-146, 2005.
- [13] S. J. Day, N. Mullineux y J. R. Reed, «Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Part I: Gibbs Phenomena and Fourier Integrals» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 3, pp. 501-506, 1965.
- [14] S. J. Day, M. J. Battison, N. Mullineux y J. R. Reed, «Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Part III: Global Response» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 6, pp. 259-265, 1968.
- [15] S. J. Day, N. Mullineux y J. R. Reed, «Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Part II: Use of the Modified Fourier Transform» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 4, pp. 31-40, 1966.
- [16] L. M. Wedepohl y S. E. T. Mohamed, «Multiconductor Transmission Lines. Theory of Natural Modes and Fourier Integral Applied to Transient Analysis» *Proc. Inst. Elec. Eng.*, vol. 116, nº 9, pp. 1553-1563, 1969.
- [17] L. M. Wedepohl y D. J. Wilcox, «Transient Analysis of Underground Power Transmission Systems - System Model and Wave Propagation Characteristics» *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 120, nº 2, pp. 253-260, 1973.
- [18] J. W. Cooley y J. W. Tukey, «An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series» *Mathematics of Computation*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.
- [19] A. Ametani, «The Application of the Fast Fourier Transform to Electrical Transient Phenomena» *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 10, pp. 277-287,

1973.

- [20] D. J. Wilcox, «Numerical Laplace Transformation and Inversion» *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 15, pp. 247-265, 1978.
- [21] M. J. Master y M. A. Uman, «Lightning Induced Voltage on Power Lines: Theory» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 103, nº 9, pp. 75-86, 1984.
- [22] F. Heidler, «Traveling Current Source Model for LEMP Calculation» *Proc. 6th Int. Symp. Tech. Exhibition on Electromagn. Compat.*, pp. 157-162, 1985.
- [23] C. A. Nucci, F. Rachidi, M. V. Ianoz y C. Mazzetti, «Lightning Induced Voltage on Overhead Lines» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 35, nº 1, pp. 75-86, 1993.
- [24] F. Rachidi, C. A. Nucci, M. Ianoz y C. Mazzetti, «Influence of a Lossy Ground on Lightning-Induced Voltages on Overhead Lines» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, nº 3, pp. 250-264, 1996.
- [25] C. D. Taylor, «On Electromagnetic Field Excitation of Unshielded Multiconductor Cables» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 20, nº 4, pp. 495-500, 1978.
- [26] A. K. Agrawal, H. J. Price y S. H. Gurbaxani, «Transient Response of Multiconductor Transmission Lines Excited by a Nonuniform Electromagnetic Field» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 22, nº 2, pp. 119-129, 1980.
- [27] F. Rachidi, «Formulation of the Field to Transmission Line Coupling Equations in Terms of Magnetic Excitation Field» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 35, nº 3, pp. 404-407, 1993.
- [28] C. Paul, «A Spice Model for Multiconductor Transmission Line Excited by an Incident Electromagnetic Field» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 36, nº 4, pp. 342-354, 1994.
- [29] C. Paul, «Literal Solution for the Time Domain Response of a Two Conductor Transmission Line Excited by an Incident Electromagnetic

- Field» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 37, n° 2, pp. 241-251, 1995.
- [30] M. Omid, Y. Kami y M. Hayakawa, «Field Coupling to Nonuniform and Uniform Transmission Line» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 39, n° 3, pp. 201-211, 1997.
- [31] I. Erdin, R. Dounavis, Achar y M. S. Nakhla, «A Spice Model for Incident Field Coupling to Lossy Multiconductor Transmission Line» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 43, n° 4, pp. 485-494, 2001.
- [32] L. Brancik, «Simulation of Multiconductor Transmission Line Circuits Combining 1D and 2D Laplace Transformations» *Proceedings of the 2003 10th IEEE International Conference*, vol. 2, pp. 774-777, 2003.
- [33] P. Gómez, P. Moreno y J. L. Naredo, «Frequency Domain Transient Analysis of Nonuniform Lines with Incident Field Excitation» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 148, n° 1, pp. 2273-2280, 2001.
- [34] G. Shinh, N. Nakhla, R. Achar, M. Nakhla y I. Erdin, «Analysis of Multiconductor Transmission Lines with Frequency Dependent Parameters and Incident Electromagnetic Fields» *Microwave Symposium Digest*, 2005.
- [35] G. Shinh, R. Nakhla, M. Achar, M. Nakhla, A. Dounavis y I. Erdin, «Fast Transient Analysis of Incident Field Coupling to Multiconductor Transmission Lines» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 48, n° 1, pp. 57-73, 2006.
- [36] J. C. Escamilla, «Modelado para Análisis de la Transferencia de Sobretensiones Inducidas por Descargas Atmosféricas en Sistemas de Distribución» *Tesis de Maestría, SEPI ESIME Zacatenco, México, D.F.*, 2008.
- [37] P. Gómez y J. C. Escamilla, «Frequency Domain Modeling of Transmission Lines Excited by Nearby Lightning Strokes» *Proceedings of the International Conference on Power Systems Transients 2009*, 2009.
- [38] P. Gómez y J. C. Escamilla, «Frequency Domain Modeling of Nonuniform Multiconductor Lines Excited by Indirect Lightning» *Electrical Power and*

*Energy Systems*, vol. 45, pp. 420-426, 2013.

- [39] A. Borghetti, F. Napolitano, C. A. Nucci y M. Paolone, «Calculation of Lightning Induced Voltages on an Overhead Line Taking into Account the Presence of Nearby Buildings» *Proceedings of the 7th International Conference on Lightning*, 2011.
- [40] K. Sheshyekani y M. Akbari, «Evaluation of Lightning Unduced Voltages on Multiconductor Overhead Lines Located Above a Lossy Dispersive Ground» *IEEE Transactions on Power Delivery Early Acces*.
- [41] P. Gómez y F. A. Uribe, «The numerical Laplace transform: an accurate tool for analyzing electromagnetic transients on power system devices» *Int. Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 31, nº 2-3, pp. 116-123, 2009.
- [42] P. Moreno y A. Ramírez, «Implementation of the Numerical Laplace Trasform: A Review» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 23, nº 4, pp. 2599-2609, 2008.
- [43] P. Gómez, «Modelado de Condiciones No Lineales para Análisis de Transitorios Electromagnéticos Utilizando la Transformada Numérica de Laplace» *Tesis de Maestría, CINVESTAV, Guadalajara, Jal. 2002*.
- [44] J. Hoffman, *Numerical methods for engineers and scientists*, McGraw Hill, 1992.
- [45] R. Radulent, A. Timotin, A. Tugulea y A. Nica, «The transient response of electric lines based on the equations with transient line-parameters,» *Revue Roumaine de Science et Technologie-Electrote-chn. et Energ*, vol. 23, nº 1, pp. 3-19, 1978.
- [46] C. Gary, «Approche complète de la propagation multifilaire en haute frequence par utilization des matrices complexe» *EDF Bull. Direction des Études et Rech.*, nº 3/4, pp. 5-20, 1976.
- [47] B. Gustavsen y J. Mahseredjian, «Simulation of internal overvoltages on transmission lines by an extended method of characteristics approach» *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 22, nº 3, pp. 1736-1742, 2007.

- [48] F. J. Quiñónez, P. Moreno, A. Cávez y J. L. Naredo, «Analysis of Fast Transient Overvoltages in Transformers Windings Using the Method of Characteristics» de *Proceedings of the 33rd North American Power Symposium*, pp. 521-526, College Station Texas, USA, October 15-16, 2001.

## APENDICE A. CÁLCULO DE LA CORRIENTE EN LA BASE DEL CANAL DE DESCARGA.

En el cálculo de los efectos que tienen las descargas atmosféricas indirectas en las líneas de transmisión cercanas, uno de los elementos más importantes es la forma de onda de la corriente en la base del canal de descarga  $i(0, t)$ , como se menciona en la sección 4.3.

En los casos de prueba que se presentan en la sección 4.4.2 se utiliza una superposición de dos funciones tipo Heidler [22] para el cálculo de la forma de onda de corriente en la base del canal de descarga:

$$i_H(0, t) = \frac{I_b}{\eta} \frac{(t/\tau_1)^n}{(t/\tau_1)^n + 1} \exp(-t/\tau_2) \quad (\text{A.1})$$

donde

$I_b$  Amplitud de la corriente en la base del canal de descarga;

$\tau_1$  Constante de tiempo del frente de onda;

$\tau_2$  Constante de tiempo de la cola de onda;

$\eta$  Factor de corrección de la amplitud; y

$n$  Exponente con valor 2 ... 10.

Los valores utilizados en este trabajo se presentan en la Tabla 1.1 [39]:

Tabla A..1. Parámetros de las funciones Heidler.

	Función 1	Función 2
$I_b$ (kA)	10.7	6.5
$\tau_1$ ( $\mu\text{s}$ )	0.25	2.1
$\tau_2$ ( $\mu\text{s}$ )	2.5	230
$\eta$	0.6394	0.9957
$n$	2	2

La Figura A.1 muestra la forma de onda obtenida en el dominio del tiempo al aplicar esta formulación.

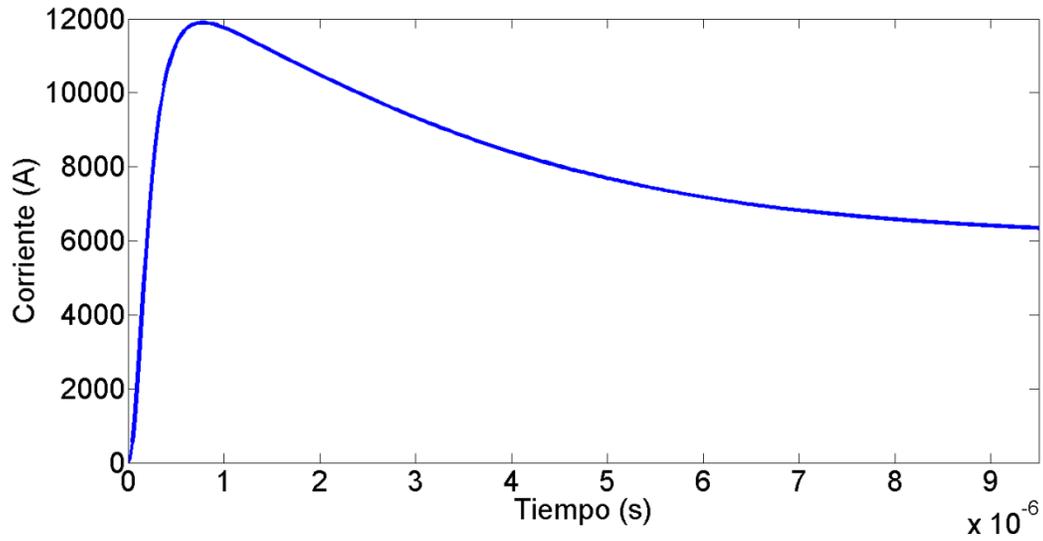


Figura A.1. Forma de onda de la corriente en la base del canal de descarga.

Una vez que se cuenta con la forma de onda de corriente en la base del canal, se le aplica la TNL directa para llevarla al dominio de la frecuencia y poder aplicarla en (4.29).

## APENDICE B. PUBLICACIONES

- R. Nuricumbo-Guillén, P. Gómez, F. Espino-Cortes. “Cálculo de sobretensiones transitorias en líneas de transmisión por medio de la aplicación sucesiva de la transformada numérica de Laplace”. 26° Reunión Internacional de Verano de Potencia, Acapulco, Gro, México, 2013.
- R. Nuricumbo-Guillén, P. Gómez, F. Espino-Cortes. “Computation of transient voltage profiles along transmission lines by successive application of the numerical Laplace transform”. 45<sup>th</sup> North American Power Symposium, Manhattan, Kansas, EEUU, 2013.